Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

ОГИБАЮЩАЯ

*

ФИЗМАТГИЗ · 1961

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 36

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

ОГИБАЮЩАЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1961

АННОТАЦИЯ

В книге на простых примерах, взятых из области механики и геометрии и доступных учащимся средней школы, разъясняется понятие огибающей, играющее важную роль в высшей математике. Эти примеры не требуют рассмотрения никаких других функций, кроме многочленов, благодаря чему разыскание огибающих производится весьма простыми приемами. Книга может быть использована в работе математических кружков.

Болтянский Владимир Григорьевич

Огибающая

Редактор *Л. Ю. Чернышева.*

Техн. редактор *Л. В. Лихачева.* Корректор *Г. М. Алексеева.*

Сдано в набор 16/III 1961 г. Подписано к печати 10/VII 1961 г. Бумага 84×108/32. **Физ. печ. л.** 2,375. Условн. печ. л. 3,89. Уч.-изд. л. 3,72. Тираж 32 000 экз. Т-08702. Цена книги 11 коп. Заказ 2430.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора 4

Глава I. **Парабола безопасности** 5

1. Движение тела, брошенного под углом к горизонту . . 5
2. Парабола 8
3. Парабола безопасности 10
4. Некоторые свойства параболы 15

Глава II. **Гипербола—граница зоны слышимости** 19

1. Сверхзвуковой полет самолета 19
2. Характеристический угол 22
3. Нахождение зоны слышимости 24
4. Некоторые свойства гиперболы 29

Глава III. **Астроида и циклоида** 36

1. Мгновенный центр вращения 36
2. Астроида 37
3. Циклоида 40

Глава IV. **Огибающая** 43

1. Семейства линий и их огибающие 43
2. Уравнение семейства линий 45
3. Пересечение линий семейства 49
4. Дифференцирование и нахождение огибающих 53
5. Дискриминантная линия 58
6. Примеры нахождения огибающих 61
7. Эволюты и эвольвенты 71

ОТ АВТОРА

Понятие огибающей встречается в различных разделах так называемой «высшей» математики. Нахождение огибающих обычно производится с помощью операции дифференцирования — одной из основных операций высшей математики. Вместе с тем понятие огибающей весьма наглядно и геометрично. Оно может быть пояснено несложными примерами, доступными пониманию учащихся старших классов.

В этой небольшой книге на материале механики (равномерное и равномерно ускоренное движение, качение) рассмотрены несколько интересных примеров построения огибающих. В качестве огибающих появляются замечательные кривые, часто встречающиеся в математике и ее приложениях: парабола (глава I), гипербола (глава II), астроида и циклоида (глава III). В заключительной, четвертой главе дается объяснение общего понятия огибающей. Здесь же указан общий прием нахождения огибающих, в связи с чем приведено краткое описание операции дифференцирования.

Первая глава содержит материал лекции, несколько лет назад прочитанной автором по просьбе руководителей школьных математических кружков при МГУ.

Для понимания основного материала книги достаточно иметь знания в объеме восьми классов средней школы.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю признательность за советы и указания, высказанные Н. В. Ефимовым и И. М. Ягломом.

В. Г. Болтянский

ГЛАВА I

ПАРАБОЛА БЕЗОПАСНОСТИ

1. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Предположим, что тело небольших размеров (материальная точка) свободно движется над земной поверхностью. Для того чтобы составить правильное представление о движении этого тела, нужно учесть действие на него всех сил, и прежде всего силы тяжести и сил, вызываемых воздействием воздушной среды на тело. Силы, вызываемые воздействием воздушной среды, в одних случаях имеют существенное значение, в других же случаях их влияние не столь заметно. Например, при рассмотрении полета планера этими силами пренебречь нельзя — воздух «поддерживает» планер. При движении же артиллерийского снаряда или баллистической ракеты влияние силы сопротивления воздуха менее значительно. На рис. 1 приведен примерный вид траектории полета снаряда

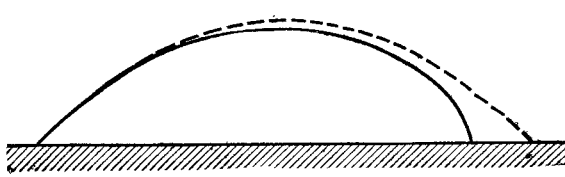

Рис. 1.

в воздухе (сплошная линия — так называемая *баллистическая кривая*) и линии, по которой летел бы снаряд под действием одной только силы тяжести.

В дальнейшем мы будем рассматривать именно такое «упрощенное», идеализированное движение тел под действием одной только силы тяжести, т. е. будем пренебрегать воздействием

воздушной среды на тело и другими менее значительными силами (скажем, силами земного магнетизма, силами притяжения Луны, Солнца и звезд и т. п.). Силу тяжести $P = mg$ будем считать постоянной и направленной вертикально вниз. Таким образом, мы принимаем, что единственной силой, действующей на брошенное тело, является сила тяжести, и что действие ее заключается в сообщении телу ускорения g, постоянного по величине и направлению.

Обозначим через L линию, по которой движется брошенное тело (траекторию его движения). В каждый момент времени движущееся тело находится в некоторой точке этой траектории и имеет определенную *скорость движения*. Скорость является *вектором* (направленной величиной), причем этот вектор *касается* траектории L. В данном случае это означает, что вся траектория L расположена по одну сторону от прямой, по которой направлен вектор скорости v (рис. 2).

Рис. 2.

Пользуясь правилом параллелограмма, можно разложить скорость брошенного тела на две составляющие — вертикальную и горизонтальную. Так как ускорение g направлено вертикально, то оно не может изменить горизонтальной составляющей скорости; следовательно, при сделанных предположениях горизонтальная составляющая скорости остается постоянной в течение всего движения. Иными словами, проекция тела на горизонтальную плоскость движется равномерно и прямолинейно (рис. 3). Если, например, предположить, что часть земной поверхности, над которой движется брошенное тело, является совершенно плоской и горизонтальной, а солнце находится в зените, то тень брошенного тела будет двигаться по земле равномерно и прямолинейно (принимая параллельность лучей солнца). Таким образом, движение брошенного тела происходит в одной вертикальной плоскости. Эту плоскость в дальнейшем мы будем предполагать совпадающей с плоскостью чертежа.

Условимся считать положительным направлением вертикальной прямой направление вверх. Тогда вертикальная

составляющая скорости меняется с ускорением $-g$, т. е. с замедлением g. Если обозначить горизонтальную и вертикальную составляющие начальной скорости знаками $v_0^г$ и $v_0^в$, то составляющие скорости через t секунд после начала движения будут соответственно равны

$$v^г = v_0^г, \tag{1}$$

$$v^в = v_0^в - gt. \tag{2}$$

Предположим, что в начальный момент времени брошенное тело находится в точке A на высоте h_0 над поверхностью

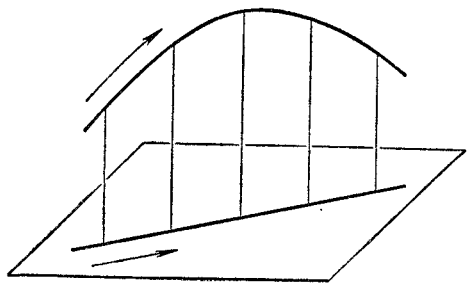

Рис. 3.

земли, которую предположим ровной и горизонтальной. Проекцию точки A на земную поверхность обозначим через O (рис. 4). Будем считать, что горизонтальная составляющая начальной скорости направлена вправо. Положение, которое занимает брошенное тело через t секунд после начала движения, обозначим через T, а проекции точки T на вертикальную и горизонтальную прямые, проходящие через O, обозначим соответственно буквами B и F. Наконец, введем обозначения $OB = h$, $OF = x$. Тогда, очевидно,

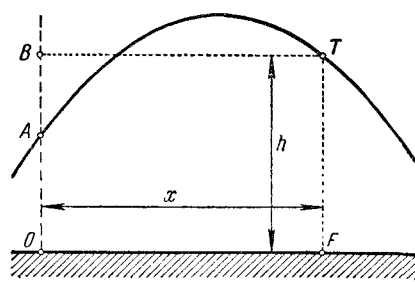

Рис. 4.

$$x = v_0^г t, \tag{3}$$

так как точка F движется равномерно и прямолинейно со скоростью $v_0^г$. Далее, $AB = h - h_0$ есть путь, пройденный точкой B, двигающейся *равноускоренно* с начальной скоростью $v_0^в$ и ускорением $-g$, так что мы имеем

$$h - h_0 = v_0^в t - \frac{gt^2}{2},$$

или

$$h = h_0 + v_0^в t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (4)$$

Формулы (1), (2) определяют скорость, а формулы (3), (4) — положение брошенного тела через t секунд после начала движения.

2. Парабола

В формулах (1) — (4) подразумевается, что t принимает лишь положительные значения, так как мы рассматриваем движение тела после момента $t = 0$, когда оно было брошено с некоторой начальной скоростью. Однако эти формулы имеют смысл и для отрицательных значений t. Предположим, например, что тело начало двигаться раньше интересующего нас момента времени $t = 0$, а в момент $t = 0$ мы засекли положение тела и его скорость и условились считать эти положение и скорость «начальными». Тогда движение тела до момента $t = 0$ также описывается формулами (1) — (4), если в этих формулах придавать t отрицательные значения. Это движение на рис. 5 показано пунктиром. Таким образом, придавая t не только положительные, но и отрицательные значения, мы получим всю траекторию движения тела, как вправо, так и влево от некоторой «начальной» точки A.

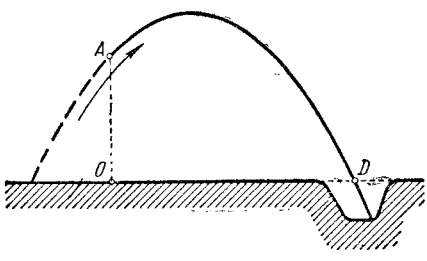

Рис. 5.

Полученная кривая упирается концами в горизонтальную прямую OD — тело падает на землю, и движение прекращается. Предположим, однако, что в точке D, в которой тело падает на землю, вырыта яма (рис. 5). Тогда тело будет еще некоторое время падать, и формулы (1) — (4) останутся справед-

ливыми. При этом тело будет находиться ниже прямой OD, так что h будет принимать отрицательные значения. Таким образом, траектория движения тела естественно продолжается вниз от прямой OD и описывается теми же формулами (1) — (4). Придавая t все большие значения, мы сможем продолжить траекторию как угодно далеко. Точно так же, придавая t в формулах (1) — (4) отрицательные и все большие по абсолютной величине значения, мы продолжим и левую «ветвь» кривой как угодно далеко. Мы получаем кривую, неограниченно простирающуюся вдаль от A обеими своими ветвями; она называется *параболой* (рис. 6). Формулы (1) — (4) описывают движение тела по этой кривой под действием постоянного по величине и направлению ускорения *).

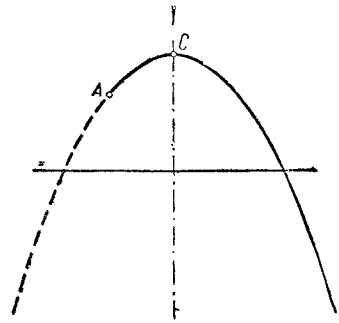

Рис. 6.

Изучим на основании формул (1) — (4) некоторые свойства рассмотренного движения тела по параболе. Из (2) ясно, что в момент времени $t = \frac{v_0^в}{g}$ вертикальная составляющая скорости $v^в$ равна нулю. До этого момента времени составляющая $v^в$ была положительна, т. е. тело двигалось вверх; после этого момента она отрицательна — тело движется вниз. Иначе говоря, *в момент времени*

$$t = \frac{v_0^в}{g} \tag{5}$$

тело имеет наибольшую высоту подъема, а именно высоту

$$h_{\max} = h_0 + \frac{(v_0^в)^2}{2g} \tag{6}$$

*) Часть пространства, в котором на каждую единицу массы действует постоянная по величине и направлению сила тяжести, называется *однородным полем тяготения*. Небольшой участок пространства над земной поверхностью можно приближенно считать однородным полем тяготения. Движение тела происходит по кривой, близкой к небольшой дуге параболы и прекращается при падении тела на землю. Изучение же всей параболы, т. е. обеих ветвей кривой, простирающихся неограниченно далеко, имеет в данной задаче только математический смысл.

(см. (4)). Это легко подтвердить также непосредственным вычислением:

$$\left[h_0+\frac{(v_0^в)^2}{2g}\right]-h=\left[h_0+\frac{(v_0^в)^2}{2g}\right]-\left(h_0+v_0^в t-\frac{gt^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{(v_0^в)^2}{2g}-v_0^в t+\frac{gt^2}{2}=\frac{1}{2g}(v_0^з-gt)^2\geqslant 0,$$

т. е. $h\leqslant h_0+\frac{(v_0^в)^2}{2g}$ при любом t. Обозначим эту наивысшую точку параболы через C. Скорость движения тела в точке C горизонтальна. Иначе говоря, часть параболы справа от точки C можно получить, если бросить тело из C горизонтально вправо с соответствующей скоростью. Левая часть параболы получится, если бросить тело горизонтально влево с такой же скоростью. Отсюда ясно, что вертикальная прямая, проходящая через C, является *осью симметрии* параболы. В точке C парабола пересекает свою ось симметрии; эта точка называется *вершиной* параболы.

3. Парабола безопасности

Рассмотрим теперь вопрос о траекториях полета снарядов, выпускаемых из орудия, расположенного в некоторой точке O земной поверхности. Скорость v_0 вылета снаряда из канала ствола будем считать не зависящей от угла φ, под которым ствол орудия наклонен к линии горизонта. Таким образом, мы должны изучить траекторию полета снаряда, брошенного из точки O со скоростью v_0 под углом φ к горизонту (рис. 7).

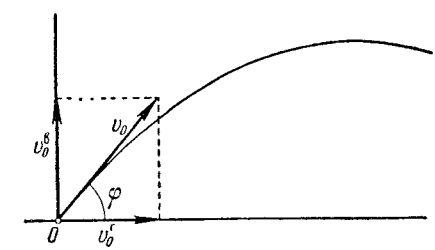

Рис. 7.

В момент времени $t=\frac{v_0^з}{g}$ снаряд достигает вершины своей траектории, которая, согласно (6), находится на высоте

$$h_{\max}=\frac{(v_0^в)^2}{2g}.$$

Мы полагаем $h_0 = 0$, так как орудие установлено на земле; высотой самого орудия мы пренебрегаем. Из рис. 7 видно, что $v_0^в \leqslant v_0$ и равенство $v_0^в = v_0$ достигается только в том случае, когда $\varphi = 90°$. Таким образом, самая большая высота подъема снаряда достигается при совершенно отвесном выстреле вверх; она равна

$$H = \frac{v_0^2}{2g}. \tag{7}$$

Займемся вычислением дальности полета снаряда. Очевидно, что высота снаряда над землей равна нулю только в двух точках — в точке выстрела и в точке взрыва — при падении на землю. Из (4) ясно, что высота равна нулю для значений t, являющихся корнями уравнения (напомним, что $h_0 = 0$)

$$v_0^в t - \frac{gt^2}{2} = 0,$$

т. е. при $t = 0$ или $t = \frac{2v_0^в}{g}$. Первый корень соответствует моменту вылета снаряда, второй — моменту падения. Расстояние от места выстрела до места взрыва равно согласно (3):

$$x_{max} = v_0^г t = \frac{2v_0^г v_0^в}{g}. \tag{8}$$

Написав это выражение в виде

$$x_{max} = \frac{2v_0^г v_0^в}{g} = \frac{\left[(v_0^в)^2 + (v_0^г)^2 - (v_0^в - v_0^г)^2\right]}{g} = \frac{v_0^2 - (v_0^в - v_0^г)^2}{g},$$

мы найдем, что *наибольшая дальность полета* получается при $v_0^в = v_0^г$, т. е. при $\varphi = 45°$; она равна

$$X = \frac{v_0^2}{g} \tag{9}$$

— в два раза больше наибольшей высоты подъема.

Аналогичным образом можно показать, что для тупых углов α (т. е. в случае, когда $v_0^г < 0$ и, следовательно, траектория полета снаряда располагается слева от точки O) наибольшая дальность полета снаряда достигается при $\alpha = 135°$. Впрочем, это ясно и из соображений симметрии (рис. 8).

Интересно отметить, что при отклонении ствола орудия от 45° вверх и вниз на один и тот же угол дальность полета

снаряда получается одинаковой (рис. 9, *а*). В самом деле (рис. 9, *б*),

$$v_0^г\Big|_{\text{для угла } 45°+\gamma} = v_0^в\Big|_{\text{для угла } 45°-\gamma};$$

$$v_0^в\Big|_{\text{для угла } 45°+\gamma} = v_0^г\Big|_{\text{для угла } 45°-\gamma}.$$

Поэтому произведение $v_0^г v_0^в$ для углов $45°+\gamma$ и $45°-\gamma$ одинаково, а следовательно (см. (8)), и дальность полета снаряда одинакова.

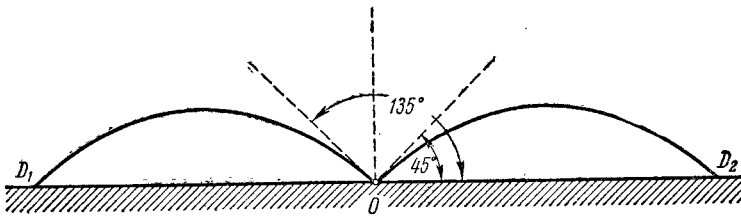

Рис. 8.

Разберем теперь вопрос о *зоне обстрела*, т. е. решим задачу о том, какую часть пространства заполняют траектории движения снарядов при разных углах φ. Зона обстрела —

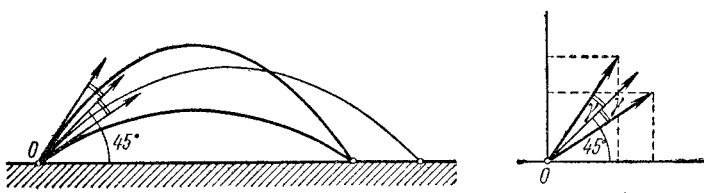

Рис. 9.

в предположении, что все траектории расположены в одной плоскости, — ограничена куполообразной кривой, проходящей через точку C максимального подъема и точки D_1, D_2 наиболее далеких разрывов (рис. 10). Эта кривая, как мы сейчас увидим, также является параболой.

Прежде всего проведем параболу через точки C, D_1 и D_2, т. е. выясним, *с какой начальной горизонтальной скоростью надо выпустить снаряд из точки C, находящейся на высоте*

$h_0 = \frac{v_0^2}{2g}$ (см. (7)), *чтобы его траектория прошла через точку* D_2, *расположенную на расстоянии* $\frac{v_0^2}{g}$ *от точки* O, (см. (9)). Обозначим эту неизвестную скорость через u. Тогда, согласно формуле (4), в которой следует положить $v_0^в = 0$ и $h_0 = \frac{v_0^2}{2g}$, мы получим, что через t секунд после выстрела высота снаряда над землей будет равна $\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}$.

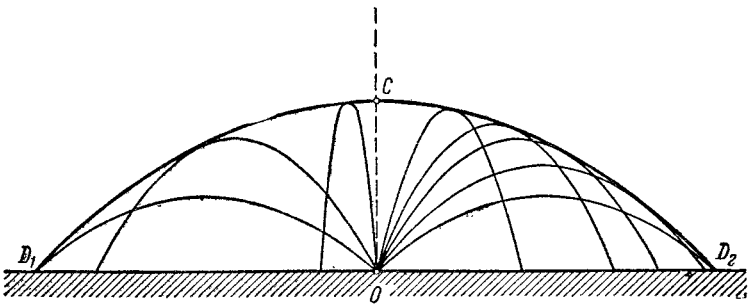

Рис. 10.

Момент падения на землю определится уравнением $\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2} = 0$, откуда $t = \frac{v_0}{g}$ (отрицательный корень отбрасываем). Из формулы (3), в которой надо положить $v_0^г = u$, заключаем, что точка падения будет находиться на расстоянии $ut = u\frac{v_0}{g}$ от O. Для того чтобы эта точка совпала с D_2, нужно, чтобы было $u\frac{v_0}{g} = \frac{v_0^2}{g}$, т. е. $u = v_0$. Итак, снаряд, выпущенный из точки C горизонтально со скоростью v_0, имеет траекторию, проходящую через D_2. Эту траекторию, продолженную не только вправо, но и влево от точки C, называют *параболой безопасности*, ибо, как мы вскоре увидим, она и ограничивает зону обстрела, а выше нее полет безопасен. Для удобства напишем формулы, которыми определяется в момент времени t положение и скорость воображаемого снаряда, двигающегося по параболе безопасности. Они получаются из

(1) — (4), если в них положить $v_0^в = 0$, $v_0^г = v_0$, $h_0 = \frac{v_0^2}{2g}$:

$$v^г = v_0, \tag{10}$$

$$v^в = -gt \tag{11}$$

$$x = v_0 t \tag{12}$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}. \tag{13}$$

Снаряд, выпущенный из орудия O, будет через t секунд после выстрела находиться в такой точке T, проекция которой F находится от точки O на расстоянии $x = v_0^г t$ (см. (3)). Определим положение T' воображаемого снаряда, при котором он будет находиться на одной вертикальной прямой с точкой T (рис. 11). В таком положении вспомогательный снаряд будет через такое время t' после выстрела из точки C, что имеем $v_0 t' = OF =$

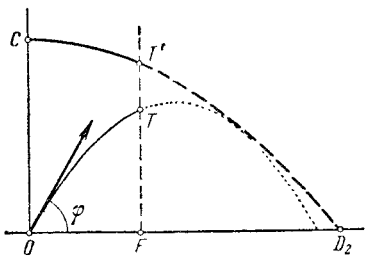

Рис. 11.

$= v_0^г t$ (см. (3), (12)), т. е. через $t' = t\frac{v_0^г}{v_0}$ секунд. Воображаемый и действительный снаряды будут в это время находиться на высотах

$$FT' = h_0 - \frac{g(t')^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2}\left(t\frac{v_0^г}{v_0}\right)^2, \quad FT = v_0^в t - \frac{gt^2}{2}.$$

Разность этих высот неотрицательна

$$FT' - FT = \frac{v_0^2}{2g} - v_0^в t + \frac{gt^2}{2}\left[1 - \left(\frac{v_0^г}{v_0}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{v_0^2}{2g} - v_0^в t + \frac{gt^2}{2}\left(\frac{v_0^в}{v_0}\right)^2 = \frac{1}{2g}\left(v_0 - gt\frac{v_0^в}{v_0}\right)^2 \geqslant 0.$$

Таким образом, точка T всегда расположена *ниже* точки T', за исключением только момента времени $t = \frac{v_0^2}{gv_0^в}$, когда $FT' - FT = 0$, т. е. точки T и T' совпадают. Итак, *траектория движения снаряда расположена ниже параболы*

безопасности и в одной точке касается ее. Снаряд, выпущенный из орудия O под углом φ к горизонту, достигает параболы безопасности через $t = \frac{v_0^2}{g v_0^в}$ секунд; проекция F снаряда на землю будет в это время находиться на расстоянии

$$x = v_0^г t = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{v_0^г}{v_0^в} = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{ctg} \varphi$$

от точки O. При изменении φ от 90° до 45° это выражение принимает все значения между 0 и $\frac{v_0^2}{g}$ (котангенс меняется от 0 до 1), так что параболы безопасности в любой ее точке касается траектория некоторого снаряда, выпущенного из O. Иначе говоря, *стреляя из O под разными углами, можно подбить самолет, находящийся в любой точке параболы безопасности или ниже ее, но ни один снаряд не залетает выше параболы безопасности*, т. е. эта парабола действительно ограничивает зону обстрела.

Обратимся снова к рис. 10. Мы имеем бесконечное множество различных кривых — парабол, являющихся траекториями полета снарядов. Кроме того, мы видим на этом чертеже еще одну кривую — параболу безопасности, — которая ограничивает область, заполненную траекториями снарядов, касаясь каждой из этих траекторий. Этот факт выражают следующими словами: *парабола безопасности является огибающей для траекторий полета снарядов* *).

4. Некоторые свойства параболы

Изучим некоторые свойства параболы безопасности **).

Расстояние точки O от точки T, в которой снаряд, движущийся по параболе безопасности, будет через t секунд после выстрела из C, равно (см. (12), (13)):

$$OT = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{(v_0 t)^2 + \left(\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{2g} + \frac{gt^2}{2}\right)^2} = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} - h.$$

*) Читатель может перейти теперь к чтению главы II.

**) Можно показать, что и любая другая парабола будет обладать аналогичными свойствами.

Проведем горизонтальную прямую d, находящуюся на расстоянии $\frac{v_0^2}{g}$ от поверхности земли. Тогда $\frac{v_0^2}{g} - h$ есть расстояние точки T от прямой d (рис. 12). Мы получаем важ-

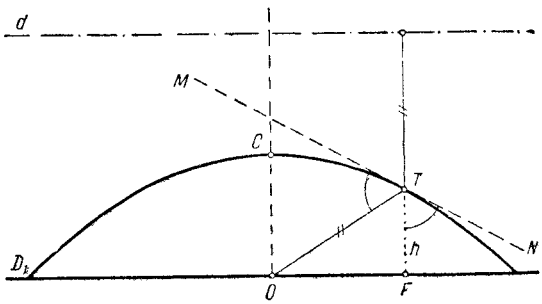

Рис. 12.

нейшее геометрическое свойство параболы, обычно принимаемое за определение этой кривой: *парабола есть геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки O и данной прямой d* (рис. 13). Точку O называют *фокусом* параболы, а прямую d — ее *направляющей* или *директрисой*.

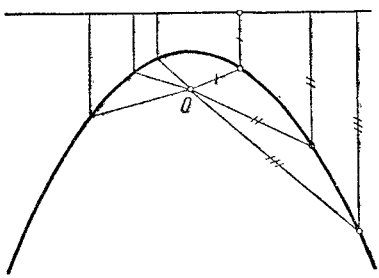

Рис. 13.

Выведем в заключение еще одно свойство параболы: *если MN — касательная к параболе в точке T, а F — проекция точки T на горизонтальную прямую, то имеет место равенство* $\angle FTN = \angle OTM$ (рис. 12). Достаточно доказать равенство тангенсов этих углов. Так как касательная MN совпадает с направлением скорости v в точке T (рис. 14), то мы имеем (см. (10)—(13))

$$\operatorname{tg} \angle FTN = \frac{v^{\Gamma}}{-v^{\text{в}}} = \frac{v_0}{gt}; \quad \operatorname{tg} \angle OTF = \frac{x}{h} = \frac{v_0 t}{\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}}. \tag{14}$$

Далее,

$$\operatorname{tg} \angle OTM = \operatorname{tg}(180° - \angle OTN) = -\operatorname{tg} \angle OTN =$$

$$= -\operatorname{tg}(\angle FTN + \angle OTF) = -\frac{\operatorname{tg} \angle FTN + \operatorname{tg} \angle OTF}{1 - \operatorname{tg} \angle FTN \operatorname{tg} \angle OTF},$$

или, после подстановки значений (14) и упрощения,

$$\operatorname{tg} \angle OTM = \frac{v_0}{gt}. \qquad (15)$$

Таким образом, $\operatorname{tg} \angle OTM = \operatorname{tg} \angle FTN$, что и требовалось доказать.

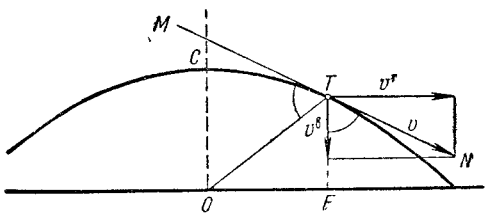

Рис. 14.

Доказанное свойство означает, что если из точки F вверх направлен луч света и если парабола является зеркально гладкой, то луч света, отразившись в точке T по закону

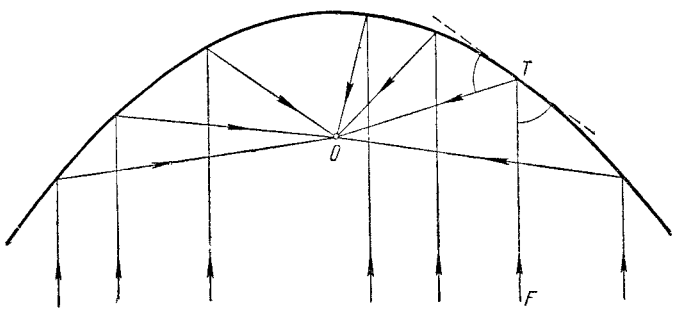

Рис. 15.

«угол падения равен углу отражения», пойдет по отрезку OT и пройдет через точку O. Так как это верно для любой точки T, то *параллельный пучок световых лучей, идущих вертикально вверх, отразившись от параболы, соберется в ее фокусе* O (рис. 15). Вращая параболу вокруг ее оси

симметрии, мы получим поверхность — параболоид вращения (рис. 16), обладающую таким же свойством, т. е. получим параболический рефлектор. Обратно, поместив источник света в фокусе параболы или рефлектора, мы увидим, что после отражения лучи

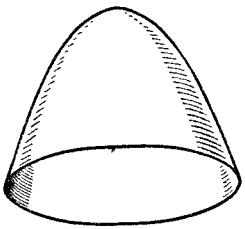

Рис. 16.

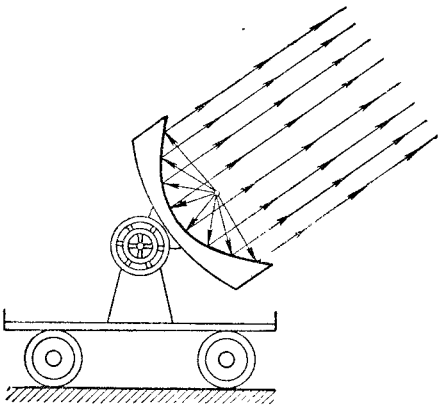

Рис. 17.

света пойдут параллельным пучком. На этом свойстве параболической поверхности основано устройство прожектора (рис. 17).

ГЛАВА II

ГИПЕРБОЛА — ГРАНИЦА ЗОНЫ СЛЫШИМОСТИ

1. Сверхзвуковой полет самолета

На высоте h над поверхностью земли со сверхзвуковой скоростью v летит самолет. Какова в данный момент времени область земной поверхности, в точках которой уже слышался или слышится сейчас звук двигателя самолета? Эту задачу (нахождение зоны слышимости) мы и хотим использовать для построения второго примера огибающей. Поверхность земли, над которой пролетает самолет, мы будем предполагать совершенно ровной и плоской, а высоту h самолета и его скорость v — постоянными.

Конечно, при такой постановке задачи имеет смысл рассматривать лишь небольшой кусок земной поверхности, который можно приближенно считать плоским, и небольшой отрезок времени, в течение которого самолет пролетает над этим куском земной поверхности. Но для математического рассмотрения задачи мы будем предполагать, что поверхность, над которой летит самолет, является неограниченной плоскостью и что самолет летит над этой плоскостью уже неограниченно долгое время. Факты, которые мы таким путем получим, будут иметь реальный смысл лишь в ограниченном куске плоскости, который можно считать совпадающим с частью земной поверхности. Мы будем, однако, условно называть всю бесконечную плоскость «земной поверхностью».

В каждый момент времени летящий самолет находится над некоторой определенной точкой земной поверхности. Эта точка — проекция самолета на земную поверхность — движется равномерно со скоростью v, вычерчивая прямую линию l, параллельную той, по которой в пространстве летит

самолет (рис. 18); (движение самолета мы будем изображать происходящим справа налево).

Пусть в тот момент времени, когда мы интересуемся зоной слышимости, самолет находится над точкой O прямой l. Ясно, что t секунд назад самолет находился над точкой A прямой l, которая расположена справа от точки O на расстоянии $OA = vt$. Точку пространства, в которой в тот момент находился самолет, обозначим через B; она расположена на высоте h над точкой A земной поверхности.

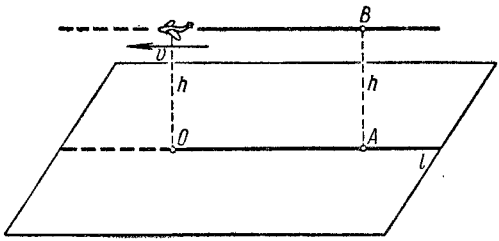

Рис. 18.

Пролетая через точку B, самолет производил шум, который стал распространяться от этой точки B во всех направлениях. Скорость распространения звука в воздухе будем обозначать через u. Тогда к моменту прохождения самолета над точкой O, т. е. через t секунд после того, как он находился в точке B, звук успеет из точки B распространиться во все стороны на расстояние ut. Иначе говоря, звук из точки B успеет за это время распространиться в *шаре* радиуса ut с центром в точке B. Если радиус этого шара больше чем h, то звук успеет дойти и до земли, причем областью на земле, куда дойдет звук от точки B, будет *круг*, получающийся при пересечении рассматривающегося шара с земной поверхностью. Из рис. 19 видно, что радиус этого круга равен $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$, а центр его находится в точке A.

Для того чтобы некоторая точка M на плоскости принадлежала зоне слышимости, необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое положение B самолета, звук от которого успевает достичь точки M, т. е. чтобы точка M принадлежала указанному выше кругу. Иначе говоря, взяв такие круги для всевозможных положений самолета, мы и получим всю зону слышимости.

Итак, мы приходим к следующей математической задаче. Дана некоторая полупрямая l, исходящая из точки O, и три положительных числа u, v, h (причем $u<v$). Пусть A — произвольная точка полупрямой l, а t — такое положительное

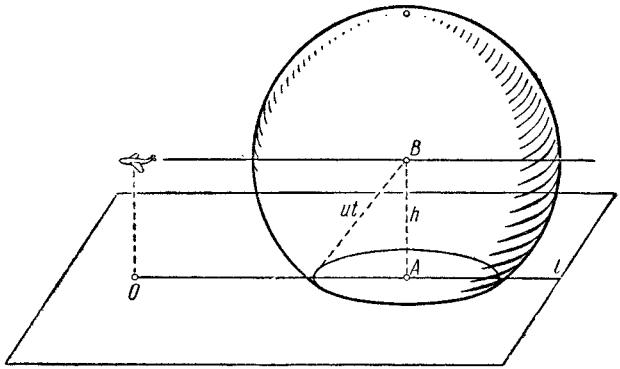

Рис. 19.

число, что длина отрезка OA равна vt. Обозначим через K_A круг с центром в точке A и радиусом $\sqrt{u^2t^2-h^2}$. Найти на плоскости область, заполняемую всеми кругами K_A,

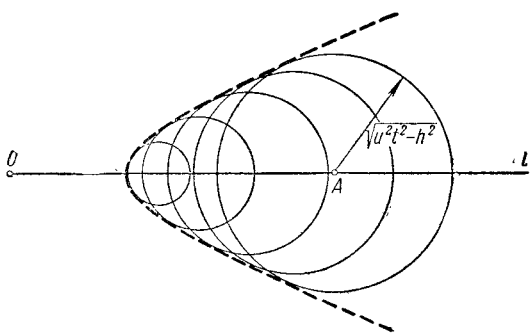

Рис. 20.

получающимися при всевозможных положениях точки A на полупрямой l. На рис. 20 изображены несколько таких кругов и пунктирная линия, которая ограничивает область,

заполняемую этими кругами, т. е. линия, являющаяся *границей* зоны слышимости. Из рассмотрения этого рисунка мы можем сделать вывод, что граница зоны слышимости является *огибающей* для рассматриваемых окружностей.

2. Характеристический угол

Рассмотрим сначала случай, когда $h=0$, т. е. когда движение происходит по поверхности земли — «сверхзвуковой автомобиль» вместо самолета. В этом случае радиус $\sqrt{u^2t^2-h^2}$ круга K_A становится равным ut, и мы приходим к следующей задаче. Из точки A, лежащей на полупрямой l и находящейся от O на расстоянии vt, как из центра, описывается круг K_A радиуса ut (причем $u<v$). Найти на плоскости область, заполняемую всеми кругами K_A.

Решение этой задачи очень просто. Все круги K_A, как легко видеть, имеют общий центр подобия O (так как при изменении t расстояние $OA=vt$ и радиус круга K_A, равный ut, меняются в одинаковое число раз). Поэтому область плоскости, заполняемая кругами K_A, т. е. зона слышимости, в рассматриваемом случае представляет собой *угол SOT* с вершиной в точке O, образованный общими касательными всех кругов K_A (рис. 21). Мы можем сказать, что стороны угла SOT служат *огибающей* для рассматриваемых окружностей.

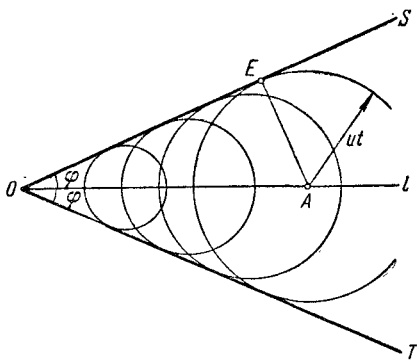

Рис. 21.

Полупрямая l, очевидно, является биссектрисой угла SOT. Половина угла SOT, т. е. угол φ между полупрямой l и одной из полупрямых OS, OT, называется *характеристическим углом* или *углом Маха* для рассматриваемого «сверхзвукового автомобиля» *). Так как в треугольнике OAE, изо-

*) Разумеется, о сверхзвуковом автомобиле речь шла только для наглядности — таких автомобилей пока еще нет. Однако рассмотренное выше понятие характеристического угла имеет реаль-

браженном на рис. 21, мы имеем $OA = vt$, $AE = ut$ и потому $OE = \sqrt{(vt)^2 - (ut)^2} = t\sqrt{v^2 - u^2}$, то

$$\sin\varphi = \frac{AE}{OA} = \frac{ut}{vt} = \frac{u}{v},$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AE}{OE} = \frac{ut}{t\sqrt{v^2 - u^2}} = \frac{u}{\sqrt{v^2 - u^2}}. \qquad (16)$$

По этим формулам, зная скорости u, v, можно вычислить величину характеристического угла.

ный смысл и широко используется в газовой динамике. Только там рассматривают не движение сверхзвукового автомобиля в неподвижном воздухе, а установившийся сверхзвуковой поток воздуха, в котором расположен неподвижный предмет. Характеристический угол

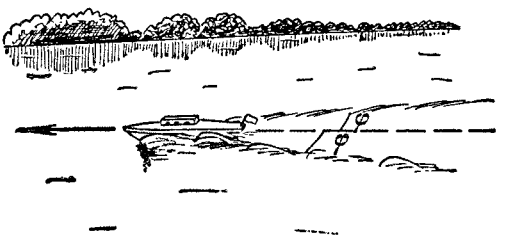

Рис. 22.

легко можно видеть при движении корабля в спокойной воде (рис. 22); в этом случае речь идет не о распространении звука в воздухе, а о распространении волн на поверхности воды (u — скорость распространения волн, v — скорость корабля).

К этому же кругу вопросов относится явление, открытое в 1934 году советскими физиками С. И. Вавиловым и П. А. Черенковым. Оно заключается в следующем. Обозначим через u скорость распространения света в некоторой однородной среде (например, в прозрачной жидкости). Если в этой среде движется со скоростью $v > u$ некоторая заряженная частица, то возникает свечение, причем свет излучается не во все стороны, а только в направлениях, составляющих с линией движения частицы вполне определенный острый угол (рис. 23); угол φ, обозначенный на этом рисунке, определяется формулами (16). Это свечение и представляет собой эффект Вавилова — Черенкова.

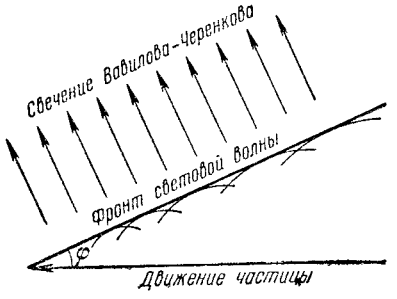

Рис. 23.

3. Нахождение зоны слышимости

Заметим сначала, что если в некоторой системе координат точка A имеет координаты (α, β), а точка M — координаты (x, y), то (рис. 24)

$$MA^2 = AN^2 + NM^2 = PQ^2 + NM^2 =$$
$$= (OQ - OP)^2 + (QM - QN)^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2.$$

Это соотношение, как нетрудно проверить, будет выполнено и при любом другом положении точки M, например, если M будет располагаться левее или ниже точки A. Поэтому *если точка M принадлежит кругу с центром A и радиусом R (т. е. если $MA \leqslant R$), то*

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \leqslant R^2, \quad (17)$$

а если точка M лежит на окружности этого круга, то

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2. \quad (18)$$

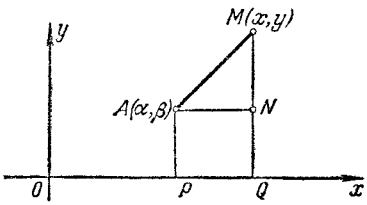

Рис. 24.

Вернемся теперь к поставленной вначале задаче о нахождении зоны слышимости для самолета, летящего над землей на высоте $h > 0$.

Рассмотрим систему координат, начало которой находится в точке O, ось абсцисс направлена по линии l, а ось ординат — перпендикулярно к ней (рис. 25). Пусть, как и прежде, A — точка полупрямой l, находящаяся от точки O на расстоянии $OA = vt$. Для того чтобы точка M с координатами x, y принадлежала кругу K_A радиуса $\sqrt{u^2 t^2 - h^2}$ с центром в точке A, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

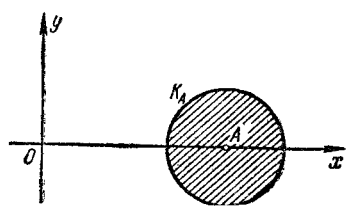

Рис. 25.

$$(x - vt)^2 + y^2 \leqslant u^2 t^2 - h^2,$$

получаемое из неравенства (17), если положить $\alpha = vt$, $\beta = 0$, $R = \sqrt{u^2 t^2 - h^2}$, или, иначе,

$$(v^2 - u^2) t^2 - 2vxt + (x^2 + y^2 + h^2) \leqslant 0. \quad (19)$$

Так как всевозможные круги K_A как раз заполняют всю область слышимости, то имеет место следующее утверждение: *точка M с координатами x, y тогда и только тогда принадлежит области слышимости, когда существует положительное число t, удовлетворяющее неравенству* (19). Докажем теперь следующую лемму, которая поможет нам разобраться в условии (19).

Лемма 1. *Рассмотрим квадратный трехчлен at^2+bt+c, в котором коэффициенты a и c положительны. Для существования положительного числа t, удовлетворяющего неравенству $at^2+bt+c\leqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:*

1) $b<0$,

2) *дискриминант трехчлена неотрицателен, т. е.*

$$b^2-4ac\geqslant 0.$$

Доказательство. Если условие 1) не выполнено, т. е. $b\geqslant 0$, то при *положительных* t все три слагаемых в сумме at^2+bt+c неотрицательны (так как a и c положительны). Следовательно, трехчлен at^2+bt+c принимает при положительных t только *положительные* значения. Если не выполнено условие 2), т. е. число b^2-4ac отрицательно, то трехчлен также принимает только положительные значения, так как

$$at^2+bt+c=a\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{1}{4a}(b^2-4ac).$$

Таким образом, если при некотором положительном t имеет место неравенство $at^2+bt+c\leqslant 0$, то оба условия 1), 2) должны выполняться.

Обратно, пусть условия 1) и 2) выполняются. Тогда в силу условия 2) корни трехчлена at^2+bt+c действительны, а так как $a>0$ и $c>0$, то произведение корней положительно, т. е. оба корня имеют одинаковые знаки. Из условия 1) вытекает, что сумма корней положительна, и потому *оба корня положительны*. Иначе говоря, существует такое положительное число, что $at^2+bt+c=0$, что и требовалось. Лемма доказана.

Эта лемма может быть применена к трехчлену, стоящему в левой части соотношения (19), так как в нем коэффициенты $a=v^2-u^2$ и $c=x^2+y^2+h^2$ положительны. Таким образом, для существования положительного числа t, удовлетворяющего неравенству (19) (т. е. для того чтобы точка M

принадлежала области слышимости), необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие два условия:

1) $2vx > 0$, или, иначе, $x > 0$;

2) дискриминант неотрицателен, т. е.

$$(2vx)^2 - 4(v^2 - u^2)(x^2 + y^2 + h^2) \geqslant 0.$$

Раскрыв в последнем неравенстве скобки и разделив его на положительное число $4(v^2 - u^2)h^2$, мы перепишем это неравенство в виде

$$\frac{x^2}{\frac{v^2 - u^2}{u^2} h^2} - \frac{y^2}{h^2} \geqslant 1.$$

Наконец, обозначив число $\frac{v}{u} h$ через c, мы получим

$$\frac{x^2}{c^2 - h^2} - \frac{y^2}{h^2} \geqslant 1. \tag{20}$$

Заметим, что $v > u$, и потому $c = \frac{v}{u} h > h$, т. е. число $c^2 - h^2$ положительно.

Итак, *область слышимости состоит из всех тех точек, лежащих справа от оси Oy (т. е. удовлетворяющих условию $x > 0$), для координат которых выполнено соотношение* (20).

Если координаты x, y точки M удовлетворяют неравенству

$$\frac{x^2}{c^2 - h^2} - \frac{y^2}{h^2} > 1, \tag{21}$$

то, как легко понять, точка M лежит внутри области слышимости. Действительно, все точки, расположенные очень близко к M (т. е. точки, координаты которых мало отличаются от координат точки M), также будут удовлетворять неравенству (21); иначе говоря, точку M со всех сторон окружают точки, принадлежащие области слышимости, а это и означает, что точка M лежит внутри этой области (точка M_1 на рис. 26). Если же координаты x, y точки M удовлетворяют соотношению

$$\frac{x^2}{c^2 - h^2} - \frac{y^2}{h^2} = 1, \tag{22}$$

то точка M лежит на границе области слышимости (точка M_2 на рис. 26). Действительно, достаточно чуть-чуть изменить

значение координаты y, увеличив ее абсолютную величину, и условие (20) перестанет выполняться, т. е. как угодно близко к M имеются точки, не принадлежащие зоне слышимости.

Итак, *точки, лежащие справа от оси Oy, координаты которых удовлетворяют неравенству* (21), *расположены внутри зоны слышимости, а точки, удовлетворяющие уравнению* (22), — *на границе этой зоны.*

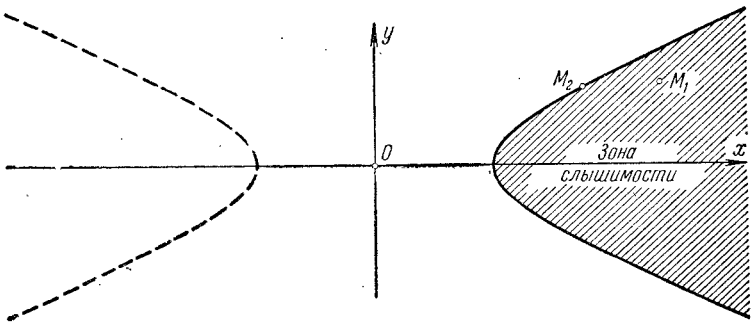

Рис. 26.

Если мы рассмотрим все точки на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (22), а не только те, для которых $x > 0$, то мы получим не только границу области слышимости, но и точно такую же кривую линию, симметрично расположенную слева от оси Oy (пунктирная кривая на рис. 26). Принято считать, что это не две разные линии, а две части или, как чаще говорят, две ветви одной линии, которая называется *гиперболой* *).

Итак, мы доказали выше, что *границей зоны слышимости является правая ветвь гиперболы, определяемой уравнением* (22). Из этого можно заключить, что правая ветвь гиперболы (22) является огибающей для кругов K_A (рис. 27), т. е. что в каждой своей точке M_0 эта ветвь

*) Обычно уравнение гиперболы записывают в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Таким образом, для нашей гиперболы (22) числа a и b имеют значения: $a = \sqrt{c^2 - h^2}$, $b = h$.

касается одного из кругов K_A*). Для дальнейшего нам нужно будет иметь формулы, позволяющие находить тот круг K_A, который касается огибающей в точке M_0. Выведем эти формулы. Пусть M_0 — некоторая точка, лежащая на границе зоны слышимости, т. е. лежащая на правой ветви

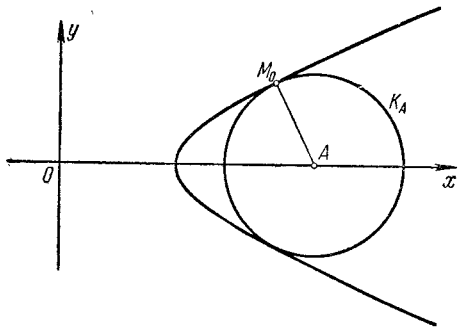

Рис. 27.

гиперболы (22). Обозначим координаты этой точки через x_0 и y_0. Эти координаты удовлетворяют уравнению (22), так как точка M_0 лежит на гиперболе, откуда находим

$$y_0^2 = h^2\left(\frac{x_0^2}{c^2 - h^2} - 1\right);$$

далее, вспоминая формулу $c = \frac{v}{u}h$, получаем

$$x_0^2 + y_0^2 + h^2 = \frac{c^2 x_0^2}{c^2 - h^2} = \frac{v^2 x_0^2}{v^2 - u^2}. \qquad (23)$$

Так как точка M_0 принадлежит зоне слышимости (она лежит на границе этой зоны), то найдется круг K_A, содержащий эту точку, т. е. найдется положительное число t, удовлетворяющее неравенству (см. (19)):

$$(v^2 - u^2)t^2 - 2vx_0 t + (x_0^2 + y_0^2 + h^2) \leqslant 0,$$

или, что то же самое (см. (23)), неравенству

$$(v^2 - u^2)t^2 - 2vx_0 t + \frac{v^2 x_0^2}{v^2 - u^2} \leqslant 0.$$

*) Читатель может перейти теперь к чтению главы III или даже сразу главы IV.

Но последнее неравенство можно переписать в виде

$$(v^2 - u^2)\left[t - \frac{vx_0}{v^2 - u^2}\right]^2 \leqslant 0,$$

откуда ясно, что оно выполняется только при одном значении t, а именно при значении

$$t = \frac{vx_0}{v^2 - u^2},$$

обращающем в нуль выражение, стоящее в квадратных скобках. Таким образом, существует только один круг K_A, содержащий точку M_0, а именно круг с центром в точке A, отстоящей от O на расстоянии

$$OA = vt = \frac{v^2 x_0}{v^2 - u^2} = \frac{c^2 x_0}{c^2 - h^2}. \qquad (24)$$

Рассматриваемая точка M_0 лежит на окружности этого круга K_A, так как M_0 расположена на границе зоны слышимости. Таким образом, гипербола, ограничивающая зону слышимости, проходит вне рассматриваемого круга K_A и имеет с ним общую точку M_0, т. е. касается круга K_A в точке M_0.

4. Некоторые свойства гиперболы

Изобразим теперь на одном чертеже гиперболу (22) и прямые OS, OT, наклоненные к оси абсцисс под углом φ

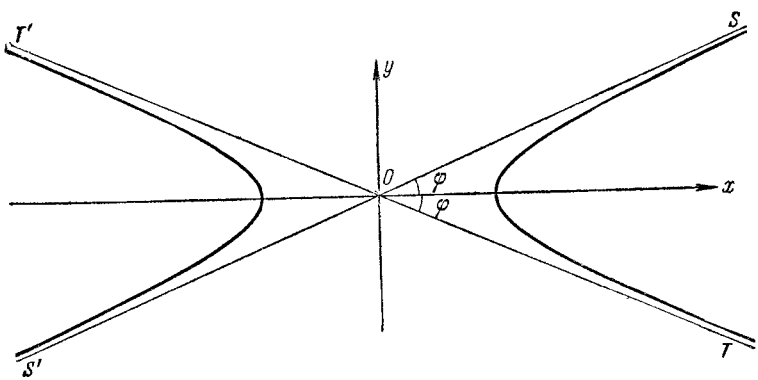

Рис. 28.

(см. (16)). Мы покажем сейчас, что *вся гипербола расположена целиком в вертикальных углах* SOT и $S'OT'$ (рис. 28) *и что по мере удаления от точки* O *гипербола*

все более и более приближается к прямым SS′ и TT′. Для доказательства мы представим себе, что по земле со скоростью v движется «сверхзвуковой автомобиль», а прямо над ним (с той же скоростью v) движется самолет. Круги K_A, относящиеся к «автомобилю» и самолету, будем обозначать символами $K_A^{\text{авт}}$ и $K_A^{\text{сам}}$. Рассмотрим круги $K_A^{\text{авт}}$ и $K_A^{\text{сам}}$ с центром в одной и той же точке A, находящейся от O на расстоянии $OA = vt$. Так как радиус $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$ круга $K_A^{\text{сам}}$, очевидно, меньше, чем радиус ut круга $K_A^{\text{авт}}$, то круг $K_A^{\text{сам}}$ расположен внутри круга $K_A^{\text{авт}}$, и потому вся зона слышимости самолета расположена внутри зоны слышимости «автомобиля». Следовательно, правая ветвь гиперболы (22) расположена внутри угла SOT (рис. 28); симметричная же ей левая ветвь расположена внутри угла $S'OT'$. Далее,

$$ut - \sqrt{u^2t^2 - h^2} = \frac{h^2}{ut + \sqrt{u^2t^2 - h^2}} < \frac{h^2}{ut}.$$

Таким образом, разность радиусов кругов $K_A^{\text{авт}}$ и $K_A^{\text{сам}}$ делается все меньше и меньше при увеличении t (т. е. при удалении точки A от O), а это означает, что гипербола все более приближается к прямым OS, OT (рис. 29).

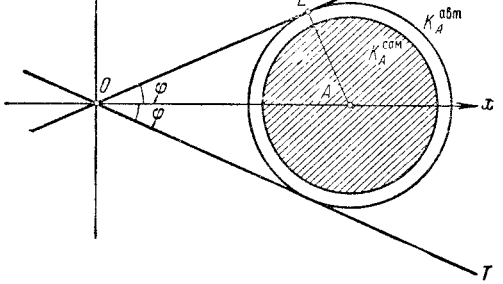

Рис. 29.

Прямые SS' и TT' называются *асимптотами* гиперболы.

Выведем теперь уравнение прямой линии, являющейся *касательной* к гиперболе. Пусть M_0 — некоторая точка, лежащая на правой ветви гиперболы. Координаты этой точки обозначим через x_0 и y_0. Как мы видели выше, круг K_A

с центром в точке A, определяемой соотношением (24), касается гиперболы (22) в точке M_0 (рис. 30). Но тогда касательная к кругу K_A в точке M_0 касается также и гиперболы. Так как касательную к кругу мы проводить умеем, то тем самым найден способ построения касательной к гиперболе.

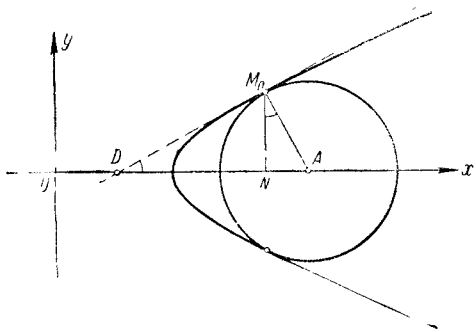

Рис. 30.

Напишем уравнение этой касательной. Для этого обозначим через D точку пересечения касательной с осью абсцисс и рассмотрим треугольник ADM_0. Опустив из точки M_0 перпендикуляр M_0N на ось абсцисс, мы найдем, что $\angle ADM_0 = \angle NM_0A$, и потому (см. (24))

$$\operatorname{tg} \angle ADM_0 = \operatorname{tg} \angle NM_0A = \frac{NA}{NM_0} = \frac{OA - ON}{NM_0} =$$

$$= \frac{\frac{c^2x_0}{c^2 - h^2} - x_0}{y_0} = \frac{h^2x_0}{(c^2 - h^2)\,y_0}.$$

Если мы запишем уравнение искомой касательной в виде $y = kx + b$, то угловой коэффициент k будет равен тангенсу угла ADM_0, образованного касательной с осью абсцисс. Этот тангенс мы только что вычислили. Таким образом, уравнение касательной имеет вид

$$y = \frac{h^2x_0}{(c^2 - h^2)\,y_0}\,x + b.$$

Остается узнать, чему равна начальная ордината b. Так как касательная проходит через точку M_0, то координаты точки M_0

должны удовлетворять уравнению касательной, т. е.

$$y_0 = \frac{h^2 x_0^2}{(c^2 - h^2)\, y_0} + b,$$

откуда

$$b = -\frac{h^2}{y_0}\left(\frac{x_0^2}{c^2 - h^2} - \frac{y_0^2}{h^2}\right).$$

Выражение, стоящее в скобках, равно единице, так как точка M_0 лежит на гиперболе (см. (22)). Таким образом, окончательно находим

$$b = -\frac{h^2}{y_0},$$

и потому уравнение касательной принимает вид

$$y = \frac{h^2 x_0}{(c^2 - h^2)\, y_0}\, x - \frac{h^2}{y_0}.$$

Наконец, умножив обе части на $\frac{y_0}{h^2}$, мы получим уравнение касательной в форме, в которой его легко запомнить (ср. уравнение гиперболы (22)):

$$\frac{x_0 x}{c^2 - h^2} - \frac{y_0 y}{h^2} = 1. \tag{25}$$

Напомним, что (25) есть *уравнение прямой, касающейся гиперболы в точке M_0 с координатами x_0, y_0.*

Напишем теперь уравнения асимптот; это даст нам возможность установить два весьма интересных свойства гиперболы. Угловой коэффициент k прямой $S'S$ равен $\operatorname{tg}\varphi$, т. е. (см. (16))

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{u}{\sqrt{v^2 - u^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{v^2}{u^2} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{h^2} - 1}} = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}},$$

а начальная ордината b равна нулю, так как эта прямая проходит через начало координат. Следовательно, уравнение асимптоты $S'S$ имеет вид

$$y = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}}\, x. \tag{26}$$

Прямая $T'T$ наклонена к оси абсцисс под тем же углом, но ее ординаты отличаются знаком от ординат точек на

прямой $S'S$. Поэтому уравнение прямой $T'T$ имеет вид

$$y = -\frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}}\, x. \tag{27}$$

Пусть теперь M_0 — произвольная точка гиперболы; координаты этой точки обозначим через x_0, y_0. Проведем касательную к гиперболе в точке M_0 и обозначим точки пересечения этой касательной с асимптотами через P_1 и P_2 (рис. 31). Мы хотим вычислить координаты точек P_1 и P_2.

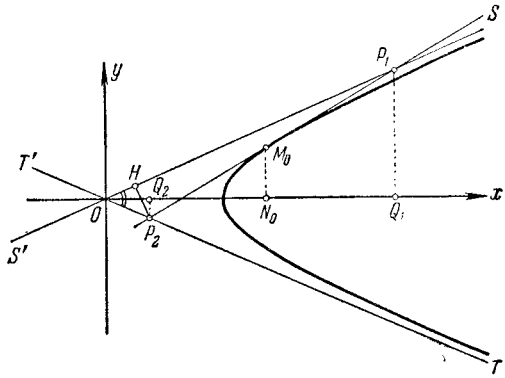

Рис. 31.

Обозначим координаты точки P_1 через x_1, y_1. Так как точка P_1 лежит на асимптоте $S'S$, то ее координаты удовлетворяют уравнению (26), т. е.

$$y_1 = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}}\, x_1. \tag{28}$$

Так как, кроме того, точка P_1 лежит на касательной, то ее координаты удовлетворяют уравнению (25), т. е.

$$\frac{x_0 x_1}{c^2 - h^2} - \frac{y_0 y_1}{h^2} = 1. \tag{29}$$

Наконец, так как точка M_0 лежит на гиперболе, то (см. (22)):

$$\frac{x_0^2}{c^2 - h^2} - \frac{y_0^2}{h^2} = 1. \tag{30}$$

Из трех последних соотношений нетрудно определить координаты точки P_1. Именно, заменяя в соотношении (29) число y_1

его значением (28), мы получим

$$\frac{x_1}{\sqrt{c^2-h^2}}\left(\frac{x_0}{\sqrt{c^2-h^2}}-\frac{y_0}{h}\right)=1.$$

Умножив, далее, обе части этого соотношения на $\frac{x_0}{\sqrt{c^2-h^2}}+\frac{y_0}{h}$ и воспользовавшись соотношением (30), найдем

$$\frac{x_1}{\sqrt{c^2-h^2}}=\frac{x_0}{\sqrt{c^2-h^2}}+\frac{y_0}{h},$$

откуда

$$x_1=x_0+y_0\frac{\sqrt{c^2-h^2}}{h}. \tag{31}$$

Совершенно аналогично можно вычислить абсциссу x_2 точки P_2:

$$x_2=x_0-y_0\frac{\sqrt{c^2-h^2}}{h}. \tag{32}$$

Из соотношений (31) и (32) мы получаем теперь

$$x_1-x_0=x_0-x_2, \tag{33}$$

$$x_1x_2=x_0^2-y_0^2\frac{c^2-h^2}{h^2}=$$

$$=(c^2-h^2)\left(\frac{x_0^2}{c^2-h^2}-\frac{y_0^2}{h^2}\right)=c^2-h^2 \tag{34}$$

(см. (30)).

Опустим из точек P_1, M_0, P_2 перпендикуляры P_1Q_1, M_0N_0, P_2Q_2 на ось абсцисс. Тогда $N_0Q_1=OQ_1-ON_0=x_1-x_0$, $Q_2N_0=ON_0-OQ_2=x_0-x_2$, и из соотношения (33) вытекает, что $N_0Q_1=Q_2N_0$, т. е. N_0 — середина отрезка Q_2Q_1. Отсюда (в силу параллельности отрезков P_1Q_1, M_0N_0, P_2Q_2) вытекает, что M_0 есть середина отрезка P_1P_2. Итак, *отрезок касательной к гиперболе, заключенный между асимптотами, делится в точке касания пополам.*

Дадим теперь геометрическую интерпретацию соотношения (34). Для этого мы вычислим площадь треугольника OP_1P_2. Опустим из точки P_2 перпендикуляр P_2H на прямую SS'. Тогда площадь $S_\triangle$ треугольника OP_1P_2 имеет следующее значение:

$$S_\triangle=\frac{1}{2}OP_1\cdot P_2H=\frac{1}{2}OP_1\cdot(OP_2\cdot\sin 2\varphi)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2\varphi\left(\frac{OQ_1}{\cos\varphi}\right)\left(\frac{OQ_2}{\cos\varphi}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot x_1x_2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{\cos^2\varphi}(c^2-h^2).$$

(см. (34)). Таким образом, *какую бы мы касательную к гиперболе ни провели, она отсекает от угла между асимптотами треугольник, имеющий всегда одну и ту же площадь, а именно*

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\cos^2 \varphi} (c^2 - h^2).$$

(Читатели, знакомые с тригонометрией, легко сообразят, что $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\cos^2 \varphi} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}}$, и потому $S_{\triangle} = h\sqrt{c^2 - h^2}$.)

ГЛАВА III
АСТРОИДА И ЦИКЛОИДА

1. Мгновенный центр вращения

В этой маленькой главе мы рассмотрим еще два примера огибающих, в качестве которых у нас здесь появятся две интересные линии: астроида и циклоида. Для исследования мы воспользуемся понятием *мгновенного центра вращения*, играющим важную роль в механике.

Рассмотрим вращательное движение плоской неизменяемой фигуры, например вырезанной из картона, т. е. такое передвижение фигуры по плоскости, при котором некоторая точка O (центр вращения) остается все время неподвижной, а сама фигура поворачивается вокруг точки O (рис. 32). Любая,

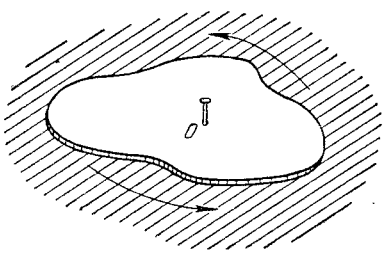

Рис. 32.

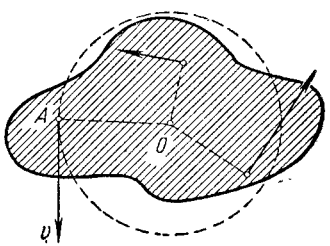

Рис. 33.

отличная от O точка A движущейся фигуры описывает при этом окружность. В каждый момент времени скорость v движения точки A направлена по касательной к этой окружности, т. е. направлена перпендикулярно отрезку OA (рис. 33).

В механике принято считать (и это можно было бы обосновать математически), что при произвольном передвижении по плоскости фигура в каждый отдельно взятый момент вре-

мени t совершает «мгновенное движение», являющееся либо *прямолинейным поступательным движением* с некоторой «мгновенной скоростью» либо *вращением* вокруг некоторой точки, называемой «мгновенным центром вращения». При этом точка O, являющаяся мгновенным центром вращения, совсем не движется в рассматриваемый момент времени (т. е. ее скорость равна нулю), а любая отличная от O точка A движущейся фигуры имеет в этот момент отличную от нуля скорость, направленную перпендикулярно отрезку OA. Таким образом, мгновенный центр вращения есть единственная точка движущейся фигуры, имеющая в данный момент скорость, равную нулю, т. е. единственная «мгновенная точка покоя».

Пусть, например, круг (или какая-либо другая фигура) без скольжения катится в плоскости по некоторой линии L (рис. 34). Слово «катится» означает, что круг передвигается

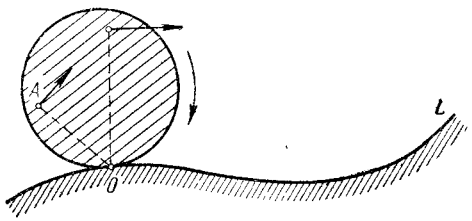

Рис. 34.

в плоскости, касаясь в каждый момент времени линии L. Когда же мы говорим, что круг катится «без скольжения», то имеем в виду, что точка движущегося круга, которой он прикасается к линии L, не скользит по линии L, т. е. эта точка имеет скорость, равную нулю, и потому является мгновенным центром вращения. Итак, *если круг катится без скольжения по неподвижной линии L, то в каждый момент времени точка касания круга с линией L является мгновенным центром вращения; если обозначить точку касания через O, то любая точка A катящегося круга имеет в рассматриваемый момент времени мгновенную скорость, направленную перпендикулярно отрезку OA.*

2. Астроида

Возьмем в качестве линии L окружность некоторого радиуса R и будем рассматривать круг радиуса $1/4\,R$, катящийся без скольжения по окружности L с внутренней ее стороны. Отметим на окружности катящегося круга некоторую

точку A и проследим *траекторию движения* точки A, т. е. линию, которую вычерчивает точка A при качении круга.

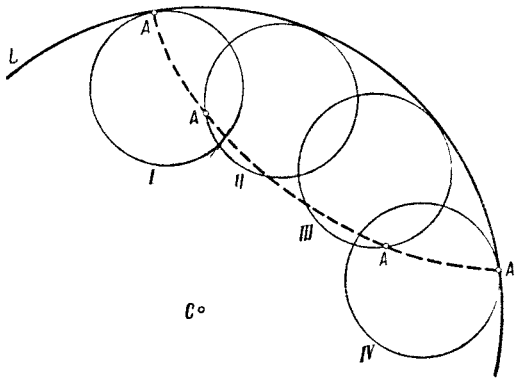

Рис. 35.

Если, например, в начальный момент точка A находилась на окружности L (рис. 35, положение I катящегося круга), то затем точка A переместится внутрь окружности L (положения II, III) и вновь вернется на окружность L (положение IV). В результате точка A опишет дугу, расположенную внутри окружности L и упирающуюся в нее своими концами (пунктир на рис. 35). Ясно, что между концами этой дуги содержится ровно четверть окружности L, ибо длина окружности L вчетверо больше длины окружности катящегося круга. При дальнейшем качении круга точка A опишет вторую такую же дугу, стягивающую четверть окружности, затем третью и четвертую. В результате точка A вернется в исходное положение, вычертив при этом замкнутую линию с четырьмя заостриями (вершинами), вписанную в окружность L (рис. 36). Эта линия называется *астроидой*. Соединив через одну вершины

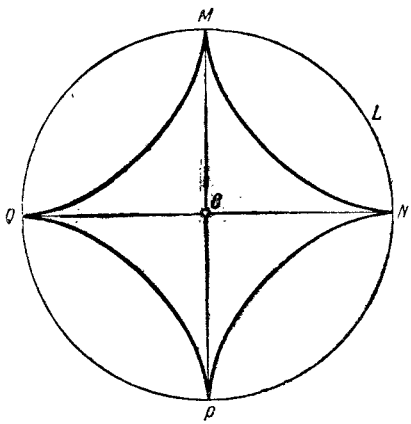

Рис. 36.

астроиды, мы получим два взаимно перпендикулярных диаметра PM и QN окружности L, делящих астроиду на четыре равные дуги.

Рассмотрим некоторое положение катящегося круга и соответствующую точку A астроиды (рис. 37). Точку касания катящегося круга с окружностью L, как и прежде, обозначим через O. Легко понять, что дуга MO окружности L имеет ту же длину, что и дуга AO окружности катящегося круга: ведь в начальном положении катящегося круга точка A совпадала с M, а качение происходит без скольжения. Проведем из центра C окружности L радиусы CM, CO, CN. Радиус CO проходит, очевидно, через центр катящегося круга и пересекает окружность этого круга в точке D, диаметрально противоположной точке касания O. Так как радиус катящегося круга равен $1/4\,R$, то $CD = DO = 1/2\,R$. В этот момент качения круга мгновенный центр вращения находится в точке O, и потому скорость движения точки A, описывающей астроиду, направлена перпендикулярно отрезку OA. Но скорость движения точки всегда направлена по касательной к той траектории, которую эта точка описывает. Поэтому перпендикуляр к отрезку OA, проходящий через точку A, является касательной к астроиде в точке A. Этот перпендикуляр проходит, очевидно, через точку D (ибо угол OAD опирается на диаметр). Итак, AD — касательная к астроиде. Точки пересечения этой касательной с радиусами CM и CN обозначим через E и F.

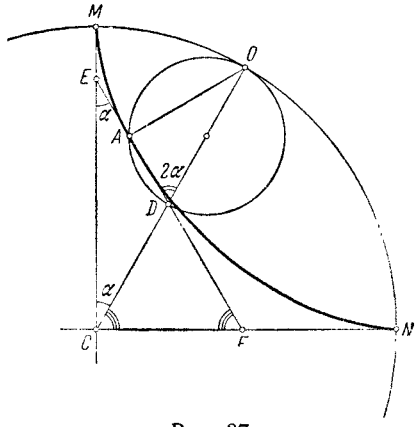

Рис. 37.

Обозначим, далее, угол MCO через α. Так как дуга MO стягивает центральный угол α, то равная ей по длине дуга AO стягивает в окружности вчетверо меньшего радиуса центральный угол 4α, а потому вписанный угол ADO, опирающийся на ту же дугу AO, равен 2α. Теперь из треугольника CDE находим: $\angle CED = \alpha$, а из треугольника CDF получаем: $\angle DCF = \angle DFC = 90° - \alpha$. Следовательно, треугольники CDE и CDF — равнобедренные, т. е. $ED = CD = DF = 1/2\,R$,

и потому $EF = R$. Итак, *отрезок EF касательной к астроиде, заключенный между прямыми CM и CN, равен радиусу R окружности L.* Так как $\angle CEF = \alpha$, а угол α при качении круга по дуге MN меняется от 0 до 90°, то с помощью этого построения может быть получен любой отрезок EF длины R, концы которого лежат на сторонах угла MCN. Иначе говоря, *астроида касается всех прямолинейных отрезков длины R, концы которых лежат на двух взаимно перпендикулярных прямых MP и NQ*, т. е. астроида является *огибающей* всех этих отрезков (рис. 38).

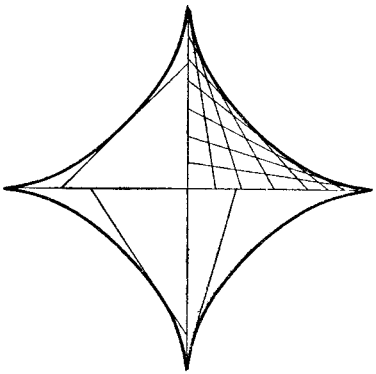

Рис. 38.

В главе IV (см. стр. 63) мы еще вернемся к рассмотрению астроиды и выведем ее уравнение.

3. Циклоида

Будем теперь рассматривать круг радиуса r, катящийся без скольжения по прямой линии L. Точка A, лежащая на

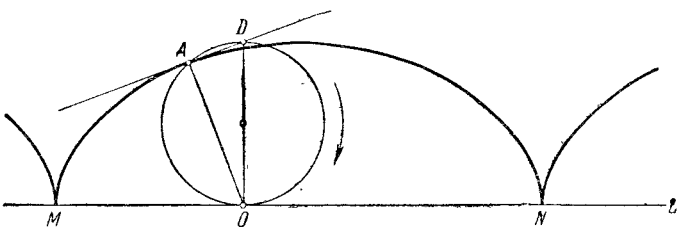

Рис. 39.

окружности катящегося круга, вычерчивает при таком движении линию, называемую циклоидой (рис. 39). Каждая «арка» циклоиды заключает между своими концами отрезок прямой L, имеющий длину $2\pi r$.

Рассмотрим некоторое положение катящегося круга и соответствующую точку A циклоиды. Точку касания круга с прямой L обозначим через O, а диаметрально противоположную

точку окружности — через D. В этот момент качения круга мгновенный центр вращения находится в точке O, и потому скорость движения точки A, описывающей циклоиду, направлена перпендикулярно отрезку OA, т. е. направлена по прямой AD. Так как скорость движения направлена всегда по касательной к линии движения точки, то *прямая AD есть касательная к циклоиде в точке A.*

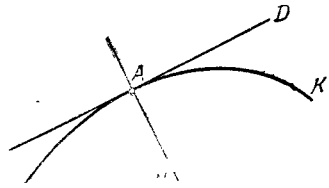

Рис. 40.

Если K — некоторая кривая, A — ее точка и AD — касательная к кривой K в точке A (рис. 40), то прямая линия, проходящая через точку A и перпендикулярная к касательной AD, называется *нормалью* к кривой K в точке A. Из рис. 39 ясно, что нормалью к циклоиде в точке A служит прямая AO.

Отметим еще, что длина отрезка MO равна длине дуги AO окружности, ибо качение происходит без скольжения.

Установим теперь одно важное свойство циклоиды. Рассмотрим две циклоиды, изображенные на рис. 41. Мы дока-

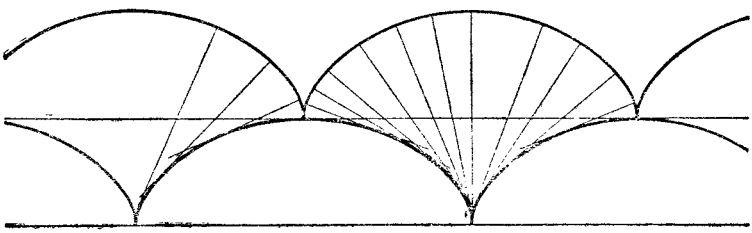

Рис. 41.

жем сейчас, что *любая нормаль к верхней циклоиде является касательной для нижней* (и обратно, любая касательная к нижней циклоиде является нормалью для верхней). Иначе говоря, нижняя циклоида является *огибающей* для нормалей, проведенных к верхней циклоиде. Если к некоторой кривой K проведены во всех ее точках нормали, то огибающая этих нормалей называется *эволютой* линии K (рис. 42). Таким образом, сформулированное выше свойство циклоиды означает, что *эволютой циклоиды является равная ей, но смещенная циклоида*: эволютой верхней циклоиды на рис. 41 является нижняя.

Докажем это свойство циклоиды. Рассмотрим некоторое положение круга, качением которого по прямой L образована верхняя циклоида (рис. 43). Буквы A, O и D имеют тот же смысл, что и на рис. 39. Построим круг, симметричный только что рассмотренному относительно точки O, и пусть A' и D' — точки, симметричные точкам A и D. Тогда отрезок MO имеет ту же длину, что и дуга OA, отрезок MC имеет ту же длину (равную πr), что и полуокружность OD; следовательно, отрезок OC имеет ту же длину, что и дуга AD. Иначе говоря, отрезок $D'Q$ имеет ту же длину, что и дуга $D'A'$. Но это означает, что точка A' лежит на нижней циклоиде, а нижний круг на рис. 43 как раз соответствует этой точке A'. Из доказанных выше свойств касательных и нормалей следует теперь (в силу того, что D' — мгновенный центр вращения при качении круга по прямой L'), что OA' — касательная, а $A'D'$ — нормаль к нижней циклоиде. Так как отрезки OA и OA' составляют продолжение один другого, то мы видим, что произвольно взятая нормаль AA' к верхней циклоиде является касательной для нижней циклоиды.

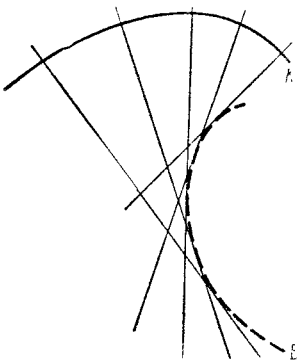

Рис. 42.

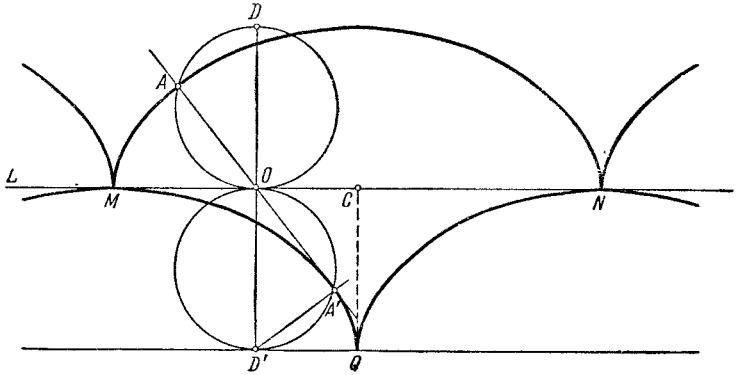

Рис. 43.

ГЛАВА IV

ОГИБАЮЩАЯ

1. Семейства линий и их огибающие

Из целого ряда вопросов, рассмотренных в главах I, II и III, мы хотим теперь выделить факты, связанные с рассмотрением рис. 10, 20, 21, 38, 41. В каждом из этих случаев мы имеем бесконечное множество кривых или, как говорят, *семейство кривых* — в первом случае *семейство парабол*, во втором и третьем случае — *семейство окружностей*, в двух последних случаях — *семейство прямых* (на чертежах изображены, разумеется, не все линии семейства — их бесконечно много, — а лишь некоторые из них). Во всех случаях

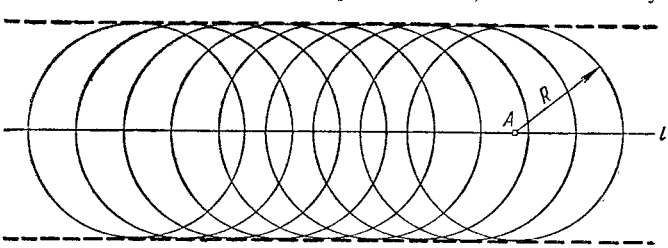

Рис. 44.

линии рассматриваемого семейства заполняют на плоскости некоторую область (зону обстрела в первой главе, зону слышимости во второй главе), причем кривая, ограничивающая эту область, в каждой своей точке касается некоторой линии семейства. Мы называем эту кривую *огибающей*. Так, в примере, изображенном на рис. 10, мы имеем семейство парабол — траекторий снарядов. Огибающая этого семейства линий (парабола безопасности) в каждой своей точке касается одной

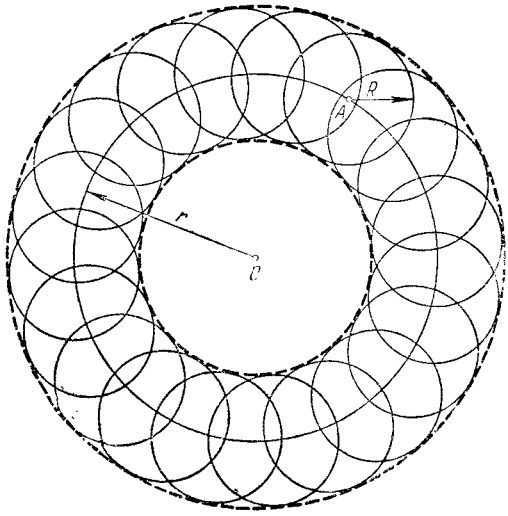

Рис. 45.

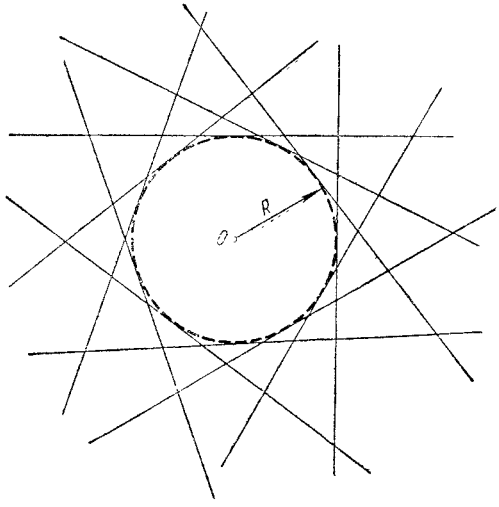

Рис. 46.

из линий семейства, т. е. одной из траекторий снаряда. В примере, изображенном на рис. 20, мы имеем семейство окружностей. Огибающая этого семейства линий (одна ветвь гиперболы) в каждой своей точке касается одной из линий нашего семейства, т. е. одной из окружностей.

Вообще, *если имеется некоторое семейство линий, то огибающей этого семейства называется такая линия, которая в каждой своей точке касается одной из линий заданного семейства.* Приведем простые примеры. Рассмотрим семейство кривых, состоящее из окружностей одного и того же радиуса R с центрами на заданной прямой l (рис. 44). Огибающая этого семейства состоит, очевидно, из двух параллельных прямых, находящихся на расстоянии R от прямой l. Далее, если мы рассмотрим семейство окружностей радиуса R с центрами на заданной окружности O радиуса r, то (при $r > R$) огибающая этого семейства будет состоять из двух окружностей радиусов $r + R$ и $r - R$ (рис. 45).

Наконец, еще один простой пример. Рассмотрим семейство, состоящее из всех прямых, проходящих на одном и том же расстоянии R от данной точки O (рис. 46). Очевидно, огибающей этого семейства прямых является окружность радиуса R с центром в точке O.

2. Уравнение семейства линий

Теперь мы хотим выяснить, каким образом можно задавать семейства линий с помощью формул. Для этого мы разберем подробнее рассмотренные выше примеры.

Рассмотрим вновь семейство окружностей радиуса R с центрами на прямой l (рис. 44). Примем прямую l за ось абсцисс координатной системы и проведем перпендикулярно к ней ось ординат. Пусть A — некоторая точка прямой l; обозначим ее абсциссу через α (ордината точки A, очевидно, равна нулю). Согласно (18), окружность с центром в точке A и радиусом R описывается уравнением

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2$$

(которое получится, если в формуле (18) считать β равным нулю), или, что то же самое, уравнением

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 = 0. \qquad (35)$$

В уравнение (35) входит число α. При каждом α мы получаем одну из окружностей семейства, а именно ту, центр

которой находится в точке с абсциссой α. Придавая числу α всевозможные значения и каждый раз вычерчивая получающуюся окружность, мы получим все рассматриваемое семейство окружностей. На основании этого соотношение (35) называется *уравнением рассматриваемого семейства окружностей*. Величина α, входящая наряду с координатами x, y в уравнение (35), называется *параметром*.

Рассмотрим теперь окружности кругов K_A, которые мы изучали в главе второй (см. рис. 20). Возьмем одну из таких окружностей; ее центр находится в точке A с абсциссой vt, а радиус равен $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$. Обозначая число vt через α $\left(\text{так что } t = \frac{\alpha}{v}\right)$ и вспоминая, что $\frac{u}{v} = \frac{h}{c}$ (см. (20)), мы найдем:

$$\sqrt{u^2t^2 - h^2} = \sqrt{\frac{u^2}{v^2}\alpha^2 - h^2} = \sqrt{h^2\left(\frac{\alpha^2}{c^2} - 1\right)}.$$

Итак, радиус окружности, имеющей центр в точке A с абсциссой α, равен $\sqrt{h^2\left(\frac{\alpha^2}{c^2} - 1\right)}$. Согласно (18), уравнение этой окружности имеет вид

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = h^2\left(\frac{\alpha^2}{c^2} - 1\right),$$

или, после раскрытия скобок,

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right) + h^2 = 0. \qquad (36)$$

При каждом α это уравнение дает нам одну из окружностей изображенного на рис. 20 семейства, а придавая параметру α всевозможные положительные значения, мы получим все рассматриваемое семейство окружностей.

Формулы (35) и (36) позволяют нам сделать следующий вывод. *Семейство линий может быть задано с помощью одного уравнения с тремя неизвестными x, y, α, где x, y — координаты точек, а α — параметр (вспомогательная величина); при каждом определенном α это уравнение дает нам одну из линий рассматриваемого семейства; придавая же числу α всевозможные значения и каждый раз вычерчивая получающуюся линию, мы и получим все рассматриваемое семейство линий.*

Мы условимся уравнение семейства линий записывать в виде

$$f(x, y, \alpha) = 0, \qquad (37)$$

где $f(x, y, \alpha)$ означает то, что записано в левой части соотношения (35) или (36), или какого-либо другого аналогичного уравнения. В дальнейшем будет рассматриваться лишь случай, когда функция $f(x, y, \alpha)$ является *многочленом*, связывающим величины x, y, α.

Однако задание семейств линий уравнением вида (37) не всегда бывает удобным. Чтобы понять это и найти еще один способ задания семейств линий, мы рассмотрим два следующих примера.

Возьмем семейство окружностей, изображенное на рис. 45. Точку O мы примем за начало системы координат. Пусть A — некоторая точка, лежащая на окружности радиуса r с центром в начале координат. Обозначим ее координаты через α, β. Тогда числа α и β удовлетворяют соотношению

$$\alpha^2+\beta^2=r^2. \tag{38}$$

Окружность радиуса R с центром в точке A имеет, согласно (18), уравнение

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2. \tag{39}$$

Соотношения (38), (39) и определяют рассматриваемое семейство окружностей. Именно, уравнение (39) дает окружность радиуса R с произвольным центром; соотношение же (38) требует, чтобы этот центр лежал на окружности радиуса r с центром в точке O. Раскрывая скобки и перенося все члены в левую часть, мы перепишем соотношения (38), (39) в виде

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-R^2=0, \quad \alpha^2+\beta^2-r^2=0. \tag{40}$$

Первое из этих соотношений содержит, кроме координат x, y, два параметра α, β; второе же соотношение связывает между собой эти два параметра. В таком виде мы и будем рассматривать уравнение нашего семейства окружностей *).

Наконец, еще один пример. Рассмотрим траектории снарядов, изученные в первой главе (см. рис. 10). Обозначая горизонтальную и вертикальную составляющие начальной скорости через α и β, а высоту снаряда — буквой y (вместо h),

*) Заметим, что, разрешив второе из соотношений (40) относительно β и подставляя найденное значение в первое соотношение, мы могли бы получить уравнение с одним параметром α, т. е. уравнение вида (37). Однако соотношения (40) более удобны, так как не содержат корней и двойного знака, получающегося при подстановке $\beta=\pm\sqrt{r^2-\alpha^2}$.

мы сможем описать движение снаряда формулами (см. (3), (4))

$$\begin{cases} x = \alpha t, \\ y = \beta t - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Находя с помощью первого из этих соотношений значение t и подставляя его во второе соотношение, мы получим

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x - \frac{gx^2}{2\alpha^2},$$

или, после умножения на $2\alpha^2$ и переноса всех членов в левую часть,

$$gx^2 - 2\alpha\beta x + 2\alpha^2 y = 0.$$

Этим уравнением и определяется траектория движения снаряда. Так как α и β — составляющие его начальной скорости v_0, то (см. рис. 7)

$$\alpha^2 + \beta^2 = v_0^2.$$

Итак, рассматриваемое семейство траекторий описывается соотношениями

$$gx^2 - 2\alpha\beta x + 2\alpha^2 y = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 - v_0^2 = 0, \qquad (41)$$

первое из которых содержит, кроме координат x, y, два параметра α, β, а второе связывает между собой эти параметры.

Формулы (40) и (41) позволяют нам сделать следующий вывод. *Семейство линий может быть задано с помощью двух уравнений*:

$$f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \qquad (42)$$

$$g(\alpha, \beta) = 0, \qquad (43)$$

первое из которых содержит координаты x, y и два параметра α, β, а второе связывает между собой эти два параметра; выбрав определенные значения параметров α и β, удовлетворяющие соотношению (43), *мы найдем с помощью уравнения* (42) *одну из линий рассматриваемого семейства; придавая же параметрам α, β всевозможные значения, подчиненные условию* (43), *мы и получим все рассматриваемое семейство линий.*

Вообще, если мы хотим задать семейство линий с помощью уравнения

$$f(x,\ y,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m) = 0, \tag{44}$$

содержащего (кроме x, y) m параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, то мы должны еще иметь $m - 1$ соотношений

$$\begin{cases} g_1(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m) = 0, \\ g_2(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_{m-1}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m) = 0 \end{cases} \tag{45}$$

между этими параметрами.

3. Пересечение линий семейства

Теперь мы переходим к вопросу о том, как, зная уравнение семейства линий, найти огибающую этого семейства.

Пусть C — огибающая некоторого семейства линий (рис. 47). Рассмотрим какую-либо линию L нашего семейства. Она

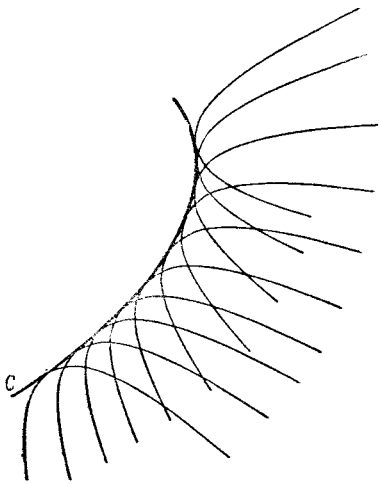

Рис. 47.

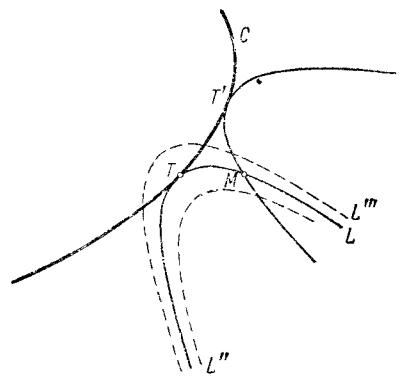

Рис. 48.

касается огибающей C (рис. 48) в некоторой точке T, располагаясь по одну сторону *) от нее. Возьмем на огибающей

*) Следует отметить, что могут существовать линии, которых все линии семейства касаются, переходя с одной стороны на дру-

какую-либо точку T', близкую к T, и обозначим через L' ту линию семейства, которая касается огибающей в точке T'. Эта линия L' будет проходить близко от линии L. Если бы вблизи точки T линия L' целиком лежала по одну сторону от L, то она либо совсем не имела бы общих точек с огибающей (L''), либо дважды пересекала бы ее (L'''). Однако и то и другое противоречиво, поскольку линия L' касается огибающей. Поэтому линия L' не может целиком лежать по одну сторону от L, т. е. она переходит с одной стороны линии L на другую. Это означает, что линии L и L' пересекаются в некоторой точке M.

Чем ближе к L располагается линия L', тем ближе будет точка M к T (рис. 50). Иначе говоря, для того чтобы найти на линии L ту точку T, в которой линия L касается огибающей, нужно рассматривать *все более и более близкие* к L линии L' нашего семейства; тогда точка M, в которой

гую (рис. 49). Такие линии также причисляют к огибающим. Для наглядности мы выпустим этот случай из рассмотрения, т. е. будем предполагать, что каждая линия семейства касается огибающей, располагаясь по одну сторону от нее. Однако можно доказать, что

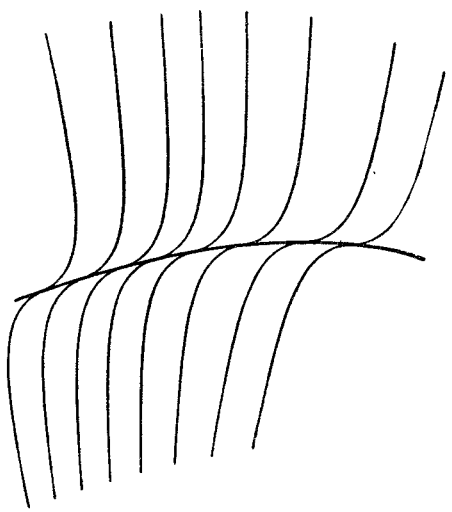

Рис. 49.

способ нахождения огибающих, который мы установим ниже, является общим (т. е. позволяет находить и огибающие такого вида, как на рис. 49).

линия L пересекается с L', будет приближаться к искомой точке T. Иногда этот факт выражают словами: каждая точка T огибающей является точкой пересечения двух «бесконечно близких» линий рассматриваемого семейства.

Эти рассуждения играют решающую роль при нахождении огибающей. Мы покажем это на примере семейства окружностей, определяемого уравнением (35). Возьмем две окружности L и L' нашего семейства, близко расположенные друг от друга. Обозначим через α значение параметра, соответствующее окружности L, а через α' — значение параметра, соответствующее окружности L'. Числа α и α' мало отличаются друг от друга, так как окружности L и L' были взяты «близко» расположенными (вспомним, что α и α' — это абсциссы тех точек, которые являются центрами окружностей L и L'). Иначе говоря, мы можем написать $\alpha' = \alpha + \varepsilon$, где ε — очень маленькое по абсолютной величине число. Для того чтобы написать уравнения окружностей L и L', мы должны параметру в уравнении (35) придать значения α и $\alpha + \varepsilon$:

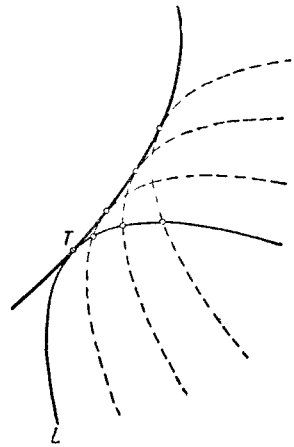

Рис. 50.

$$\left.\begin{aligned} &(L) && x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 = 0, \\ &(L') && x^2 + y^2 - 2(\alpha + \varepsilon)x + (\alpha + \varepsilon)^2 - R^2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Первому уравнению удовлетворяют точки, лежащие на окружности L, а второму — точки, лежащие на окружности L'. Точки пересечения этих окружностей лежат и на L и на L', так что они удовлетворяют обоим написанным уравнениям. Поэтому для нахождения точек пересечения нам достаточно решить эти два уравнения совместно, как систему. Мы оставим первое уравнение без изменения, а из второго уравнения для упрощения системы вычтем первое. Получим

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 &= 0, \\ -2\varepsilon x + 2\varepsilon\alpha + \varepsilon^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Заметим теперь, что число ε хотя и очень маленькое, но обязательно отличное от нуля: ведь L и L' — это две

разные окружности из нашего семейства, так что $\alpha \neq \alpha'$. Поэтому левую часть последнего уравнения можно разделить на ε, и мы получим систему

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 = 0, \\ -2x + 2\alpha + \varepsilon = 0. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Решив эту систему, мы получим точки пересечения линий L и L'. Однако вспомним, что нас интересуют не сами эти точки пересечения. Мы должны приближать линию L' к L и найти те точки, к которым будут приближаться точки пересечения линий L и L'. Но что значит «приближать» линию L' к L? Это значит брать число ε все более близким к нулю. Если же брать ε все меньше и меньше, приближая его к нулю, то второе уравнение (48) заменится соотношением $-2x + 2\alpha = 0$, т. е. «в пределе» система (48) примет вид

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 = 0, \\ -2x + 2\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Второе из этих уравнений показывает нам, что $\alpha = x$, и потому из первого уравнения мы находим

$$y^2 = R^2. \tag{50}$$

Итак, точка, в которой окружность L касается огибающей, должна удовлетворять уравнению (50). Так как это

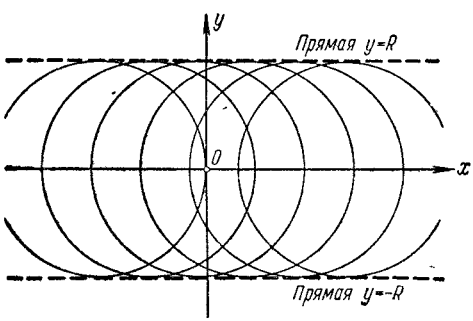

Рис. 51.

верно для любой окружности нашего семейства, то *каждая точка огибающей должна удовлетворять полученному уравнению* (50). Обратно, любая точка, удовлетворяющая уравнению (50), является точкой огибающей. Это можно до-

казать вычислением, но еще проще увидеть геометрически: ведь уравнение (50) распадается на два уравнения $y = R$ и $y = -R$, которые изображают две прямые, параллельные оси абсцисс и находящиеся на расстоянии R от нее (рис. 51). Таким образом, проведенные рассуждения помогли вывести уравнение (50), которое и определяет огибающую.

4. Дифференцирование и нахождение огибающих

Конечно огибающую, изображенную на рис. 51, можно было определить сразу, так как семейство окружностей было взято очень простым. Однако тот *алгебраический* вывод уравнения огибающей, который был приведен выше, никак не использовал простоты геометрического устройства рассматриваемого семейства; точно таким же способом можно выводить уравнение огибающей и в других случаях.

Мы повторим рассуждения в общем виде. Пусть задано семейство линий

$$f(x,\ y,\ \alpha) = 0.$$

Возьмем две «близкие» линии L и L' из этого семейства, для чего придадим параметру значения α и $\alpha + \varepsilon$:

$$\left.\begin{array}{ll} (L) & f(x,\ y,\ \alpha) = 0, \\ (L') & f(x,\ y,\ \alpha + \varepsilon) = 0 \end{array}\right\}$$

(ср. уравнения (46)). Для того чтобы найти точку пересечения (или точки пересечения, если их несколько) линий L и L', мы должны решить эти уравнения совместно, как систему. Вспомним теперь, как мы из уравнений (46) получили (47): мы оставили первое уравнение без изменения, а из второго вычли первое. Так же мы поступили и в общем случае. Тогда мы получим систему

$$\left.\begin{array}{r} f(x,\ y,\ \alpha) = 0, \\ f(x,\ y,\ \alpha + \varepsilon) - f(x,\ y,\ \alpha) = 0. \end{array}\right\}$$

Заметим, для перехода к уравнениям (48) мы разделили левую часть второго уравнения на ε; поступим так же и здесь:

$$\left.\begin{array}{r} f(x,\ y,\ \alpha) = 0, \\ \dfrac{f(x,\ y,\ \alpha + \varepsilon) - f(x,\ y,\ \alpha)}{\varepsilon} = 0. \end{array}\right\} \qquad (51)$$

Эта система дает нам точки пересечения линий L и L'. Мы теперь будем приближать L' к L, т. е. будем брать число ε все более близким к нулю. В системе (48) при этом второе уравнение несколько упростилось, и мы получили «в пределе» систему (49), из которой определили огибающую. Естественно ожидать, что в случае системы (51) второе уравнение также перейдет в пределе в некоторое более простое уравнение, которое и позволит определить огибающую. Вопрос о том, какое уравнение получится в пределе из второго уравнения (51), решается с помощью следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть* $f(x, y, \alpha)$ — *некоторый многочлен. Расположим его по степеням* α, *т. е. запишем в виде*

$$f(x, y, \alpha) = p_0 + p_1\alpha + p_2\alpha^2 + p_3\alpha^3 + \ldots, \qquad (52)$$

где коэффициенты p_0, p_1, p_2, p_3 *сами являются некоторыми многочленами от* x, y. *Тогда левая часть второго уравнения* (51) *является многочленом, т. е. мы можем написать*

$$\frac{f(x, y, \alpha+\varepsilon) - f(x, y, \alpha)}{\varepsilon} = f'_\alpha(x, y, \alpha) + \ldots, \qquad (53)$$

где $f'_\alpha(x, y, \alpha)$ *означает сумму всех членов, не содержащих* ε, *а многоточием в* (53) *обозначена сумма остальных членов, каждый из которых содержит множителем число* ε *или некоторую его степень. При этом многочлен* $f'_\alpha(x, y, \alpha)$ *имеет следующий вид*:

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = p_1 + 2p_2\alpha + 3p_3\alpha^2 + \ldots \qquad (54)$$

Доказательство.

$$\frac{f(x, y, \alpha+\varepsilon) - f(x, y, \alpha)}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\{p_0 + p_1(\alpha+\varepsilon) + p_2(\alpha+\varepsilon)^2 + p_3(\alpha+\varepsilon)^3 + \ldots -$$

$$- [p_0 + p_1\alpha + p_2\alpha^2 + p_3\alpha^3 + \ldots]\} =$$

$$= p_1\frac{(\alpha+\varepsilon)-\alpha}{\varepsilon} + p_2\frac{(\alpha+\varepsilon)^2-\alpha^2}{\varepsilon} + p_3\frac{(\alpha+\varepsilon)^3-\alpha^3}{\varepsilon} + \ldots =$$

$$= p_1 + p_2(2\alpha+\varepsilon) + p_3(3\alpha^2 + 3\alpha\varepsilon + \varepsilon^2) + \ldots =$$

$$= (p_1 + 2p_2\alpha + 3p_3\alpha^2 + \ldots) + \text{члены, содержащие } \varepsilon. \qquad (55)$$

Доказанная лемма позволяет заменить систему уравнений (51) системой

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, \alpha) &= 0, \\ f'_\alpha(x, y, \alpha) + \ldots &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

в которой многоточием обозначены невыписанные члены, каждый из которых содержит множитель ε. Решив систему (56), мы и получим точки пересечения линий L и L'. Однако вспомним, что нас интересуют не сами эти точки пересечения. Мы должны приближать линию L' к L и найти те точки, к которым будут приближаться точки пересечения линий L и L'. Иначе говоря, мы должны брать число ε все меньше и меньше, приближая его к нулю. При этом второе уравнение (56) заменится соотношением

$$f'_\alpha(x,\ y,\ \alpha) = 0,$$

так как все члены, обозначенные многоточием, содержат множитель ε и потому также будут приближаться к нулю. Итак, в пределе система (56) примет вид

$$\left.\begin{aligned} f(x,\ y,\ \alpha) &= 0, \\ f'_\alpha(x,\ y,\ \alpha) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Это означает, что точка, в которой линия L касается огибающей, должна удовлетворять соотношениям (57). Так как это верно для л ю б о й линии нашего семейства, то *каждая точка огибающей должна при некотором значении* α *удовлетворять полученным уравнениям* (57). Иначе говоря, если мы исключим параметр α из уравнений (57), т. е. найдем его значение из одного уравнения и подставим во второе, то получим одно уравнение, уже не содержащее α (т. е. связывающее только x и y), которому должна удовлетворять любая точка огибающей. Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *Каждая точка огибающей удовлетворяет уравнению, которое получается из соотношений* (57) *исключением параметра* α.

Многочлен $f'_\alpha(x,\ y,\ \alpha)$, с помощью которого были получены уравнения (57), называется *производной* многочлена $f(x,\ y,\ \alpha)$. Вычисление производной называется *дифференцированием* многочлена $f(x,\ y,\ \alpha)$. Как видно из формул (52), (54), дифференцирование многочленов производится очень просто: нужно в каждом слагаемом, содержащем множитель α^k, заменить этот множитель на $k\alpha^{k-1}$, а члены, не содержащие α, отбросить.

Укажем теперь теорему, аналогичную теореме 1, но относящуюся к случаю, когда семейство линий задается уравнениями с двумя параметрами α, β (см. (42), (43)).

Теорема 2. *Пусть семейство линий задано уравнениями* (42), (43). *Тогда каждая точка огибающей удовлетворяет уравнению, которое получается из соотношений*

$$\left.\begin{aligned} f(x,\ y,\ \alpha,\ \beta) &= 0,\\ g(\alpha,\ \beta) &= 0,\\ f'_\alpha \cdot g'_\beta - g'_\alpha \cdot f'_\beta &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

исключением параметров α *и* β.

В третьем из уравнений (58) многочлен $f'_\alpha = f'_\alpha(x,\ y,\ \alpha,\ \beta)$ вычисляется *дифференцированием по* α (т. е. нужно, не обращая внимания на параметр β, найти производную, см. (52), (54)), а многочлен f'_β получается из $f(x,\ y,\ \alpha,\ \beta)$ *дифференцированием по параметру* β. То же относится к производным g'_α и g'_β многочлена $g(\alpha,\ \beta)$.

Для того чтобы установить справедливость формул (58), мы, как и прежде, рассмотрим две близкие линии L и L' нашего семейства. Пусть линия L соответствует значениям α, β, а линия L' — близким значениям параметров $\alpha + \varepsilon_1$, $\beta + \varepsilon_2$. Иначе говоря, уравнения линий L и L' записываются в виде

$$\left.\begin{aligned} (L)\quad & f(x,\ y,\ \alpha,\ \beta) = 0,\\ (L')\quad & f(x,\ y,\ \alpha+\varepsilon_1,\ \beta+\varepsilon_2) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

причем выбранные значения параметров удовлетворяют соотношению (43), т. е.

$$\left.\begin{aligned} g(\alpha,\ \beta) &= 0,\\ g(\alpha+\varepsilon_1,\ \beta+\varepsilon_2) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Из второго уравнения (59) мы вычтем первое и аналогично поступим с соотношениями (60). Мы получим:

$$\begin{aligned} f(x,\ y,\ \alpha,\ \beta) &= 0,\\ f(x,\ y,\ \alpha+\varepsilon_1,\ \beta+\varepsilon_2) - f(x,\ y,\ \alpha,\ \beta) &= 0,\\ g(\alpha,\ \beta) &= 0,\\ g(\alpha+\varepsilon_1,\ \beta+\varepsilon_2) - g(\alpha,\ \beta) &= 0, \end{aligned}$$

или, что то же самое:

$$\left.\begin{aligned} & f(x,\ y,\ \alpha,\ \beta) = 0,\\ & [f(x,\ y,\ \alpha+\varepsilon_1,\ \beta+\varepsilon_2) - f(x,\ y,\ \alpha,\ \beta+\varepsilon_2)] +\\ & \qquad + [f(x,\ y,\ \alpha,\ \beta+\varepsilon_2) - f(x,\ y,\ \alpha,\ \beta)] = 0,\\ & g(\alpha,\ \beta) = 0,\\ & [g(\alpha+\varepsilon_1,\ \beta+\varepsilon_2) - g(\alpha,\ \beta+\varepsilon_2)] +\\ & \qquad + [g(\alpha,\ \beta+\varepsilon_2) - g(\alpha,\ \beta)] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Первые два из этих соотношений, рассматриваемые как система относительно x и y, определяют точку пересечения линий L и L'. В силу формулы (53) мы можем написать:

$$f(x, y, \alpha+\varepsilon_1, \beta+\varepsilon_2) - f(x, y, \alpha, \beta+\varepsilon_2) = \varepsilon_1\left(f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta+\varepsilon_2)+\ldots\right),$$
$$f(x, y, \alpha, \beta+\varepsilon_2) - f(x, y, \alpha, \beta) = \varepsilon_2\left(f'_\beta(x, y, \alpha, \beta)+\ldots\right),$$
$$g(\alpha+\varepsilon_1, \beta+\varepsilon_2) - g(\alpha, \beta+\varepsilon_2) = \varepsilon_1\left(g'_\alpha(\alpha, \beta+\varepsilon_2)+\ldots\right),$$
$$g(\alpha, \beta+\varepsilon_2) - g(\alpha, \beta) = \varepsilon_2\left(g'_\beta(\alpha, \beta)+\ldots\right).$$

Таким образом, соотношения (61) перепнсываются в внде:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, \alpha, \beta) &= 0,\\ g(\alpha, \beta) &= 0,\\ \varepsilon_1\left(f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta+\varepsilon_2)+\ldots\right)+\varepsilon_2\left(f'_\beta(x, y, \alpha, \beta)+\ldots\right) &= 0,\\ \varepsilon_1\left(g'_\alpha(\alpha, \beta+\varepsilon_2)+\ldots\right)+\varepsilon_2\left(g'_\beta(\alpha, \beta)+\ldots\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (62)$$

Здесь многоточием обозначены члены, содержащие множитель ε_1 или ε_2. Умножая третье из соотношенний (62) на

$$\varepsilon_1\left(g'_\beta(\alpha, \beta)+\ldots\right) - \varepsilon_2\left(g'_\alpha(\alpha, \beta+\varepsilon_2)+\ldots\right),$$

а четвертое соотношение — на

$$-\varepsilon_1\left(f'_\beta(x, y, \alpha, \beta)+\ldots\right)+\varepsilon_2\left(f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta+\varepsilon_2)+\ldots\right)$$

и складывая, получнм после прнведения подобных членов и группировки

$$\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)\left[\left(f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta+\varepsilon_2)+\ldots\right)\left(g'_\beta(\alpha, \beta)+\ldots\right) - \left(g'_\alpha(\alpha, \beta+\varepsilon_2)+\ldots\right)\left(f'_\beta(x, y, \alpha, \beta)+\ldots\right)\right]=0.$$

Число $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2$ непремснио отлнчно от нуля, так как из $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2=0$ следовало бы $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$, и потому кривые L и L' совпадали бы, а это не так. Следовательно, на $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2$ можно последнее соотношение разделить, и мы получим

$$\left(f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta+\varepsilon_2)+\ldots\right)\left(g'_\beta(\alpha, \beta)+\ldots\right) - \left(g'_\alpha(\alpha, \beta+\varepsilon_2)+\ldots\right)\left(f'_\beta(x, y, \alpha, \beta)+\ldots\right)=0.$$

Это соотношение вместе с первым из уравнений (62) и даст нам точки пересечения линий L и L'. Если же мы будем приближать линию L' к L, т. е. брать числа ε_1 и ε_2 все более близкими к нулю, то последнее соотношение в пределе перейдет в уравнеине

$$f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta)\cdot g'_\beta(\alpha, \beta) - g'_\alpha(\alpha, \beta)\cdot f'_\beta(x, y, \alpha, \beta)=0,$$

т. е. в последнее из соотношений (58). Вместе с первым из уравнений (58) оно даст нам возможность найти ту точку, в которой

линия L касается огибающей. Таким образом, приписывая к полученному соотношению первые два уравнения (62), мы и найдем систему равенств (58). Точка, в которой линия L касается огибающей, должна этой системе удовлетворять. Так как за L можно принять л ю б у ю из линий семейства, то л ю б а я точка огибающей должна (при некоторых α, β) удовлетворять системе (58), что и утверждает теорема 2.

Читатель, знакомый с понятием определителя и основными теоремами о линейных уравнениях, сможет убедиться в справедливости следующей теоремы. *Если семейство линий определяется уравнениями* (44), (45), *то любая точка огибающей удовлетворяет уравнению, которое получится, если к* (44), (45) *приписать соотношение*

$$\begin{vmatrix} f'_{\alpha_1} & f'_{\alpha_2} & \dots & f'_{\alpha_m} \\ (g_1)'_{\alpha_1} & (g_1)'_{\alpha_2} & \dots & (g_1)'_{\alpha_m} \\ (g_2)'_{\alpha_1} & (g_2)'_{\alpha_2} & \dots & (g_2)'_{\alpha_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (g_{m-1})'_{\alpha_1} & (g_{m-1})'_{\alpha_2} & \dots & (g_{m-1})'_{\alpha_m} \end{vmatrix} = 0$$

и из полученной системы равенств исключить параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

Эта теорема при $m = 1$ превращается в теорему 1, а при $m = 2$ — в теорему 2.

5. Дискриминантная линия

В теоремах 1 и 2 говорится, что всякая точка огибающей удовлетворяет уравнению, которое получится, если из соотношений (57) или (58) исключить параметры. Мы не говорили, что огибающая в точности определяется получающимся уравнением, а лишь утверждали, что любая точка огибающей этому уравнению удовлетворяет. Это не случайно. Дело в том, что линия, определяемая уравнением, которое получается, если из (57) или (58) исключить параметры, — она называется *дискриминантной линией* — может, кроме огибающей, содержать ряд других точек, не принадлежащих огибающей.

Что же собой представляет дискриминантная линия? Для ответа на этот вопрос мы расскажем (без пояснений, хотя все рассуждения можно провести, используя только введенное выше понятие производной), что́ может представлять собой линия, определяемая некоторым уравнением. Пусть $f(x, y)$ — какой-либо многочлен относительно x, y. Геоме-

трическое место точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$f(x, y) = 0,$$

называют *алгебраической линией*. Прямая является алгебраической линией, так как ее уравнение имеет вид $y = kx + b$, или $y - kx - b = 0$. Соотношения (18), (22), (41) позволяют сделать вывод, что окружность, гипербола, парабола также представляют собой примеры алгебраических линий.

Алгебраическую линию называют *гладкой*, если в каждой ее точке

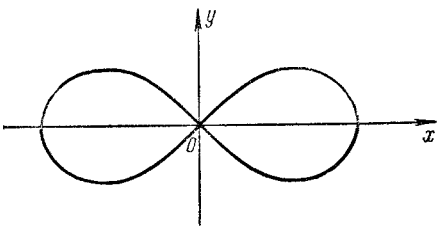

Рис. 52.

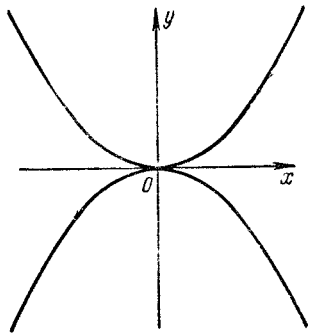

Рис. 53.

к ней можно провести касательную. Прямая, окружность, парабола, гипербола являются гладкими линиями. Но может случиться, что алгебраическая линия содержит *особые точки*, к числу которых причисляют *точки самопересечения, самоприкосновения и изолированные точки*. Например, линия, определяемая уравнением

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

(она называется *лемнискатой Бернулли*, рис. 52), пересекает сама себя, линия

$$y^2 - x^4 = 0$$

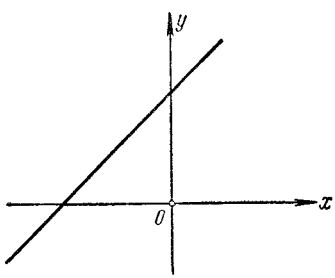

Рис. 54.

(рис. 53) имеет точку самоприкосновения в начале координат, а линия, заданная уравнением

$$(x^2 + y^2)(y - x - 1) = 0,$$

состоит из точек, принадлежащих прямой $y - x - 1 = 0$ (т. е. $y = x + 1$), и, кроме того, точки O (начала координат), вблизи которой нет других точек этой линии (рис. 54).

Всякая алгебраическая линия либо совсем не содержит особых точек, т. е. является гладкой, либо содержит лишь конечное число особых точек, разбивающих ее на отдельные гладкие куски, причем никаких других особых точек, кроме перечисленных выше, алгебраическая линия иметь не может *).

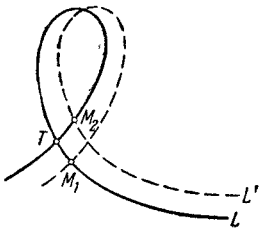

Рис. 55.

Пусть теперь нам задано *семейство* алгебраических линий, определяемое уравнением (37) или (42), (43). Если какая-либо линия L нашего семейства имеет точку самопересечения T (рис. 55), то «близкая» к ней линия L' обязательно должна пересечь линию L в некоторой точке M вблизи точки T. Поэтому рассуждения, с помощью которых мы установили теорему 1 или теорему 2, покажут нам, что координаты точки T удовлетворяют уравнениям (57) или (58), т. е. *точка T принадлежит дискриминантной линии*. Итак, точки самопересечения каждой из линий семейства должны принадлежать дискриминантной линии. Точно так же и любая изолированная точка линии L должна принадлежать дискриминантной линии. Таким образом, дискриминантная линия содержит не только огибающую, но и все особые точки линий нашего семейства. Оказывается, что этим уже и исчерпываются все точки дискриминантной линии, т. е. *дискриминантная линия состоит из огибающей и геометрического места особых точек всех линий рассматриваемого семейства* (рис. 56). Если же мы рассматриваем семейство линий, ни одна из которых не имеет особых точек, то дискриминантная линия ничего, кроме огибающей, не содержит, т. е. в этом случае дискриминантная линия совпадает с огибающей. В рассматриваемых ниже примерах все семейства состоят из линий, не имеющих особых точек.

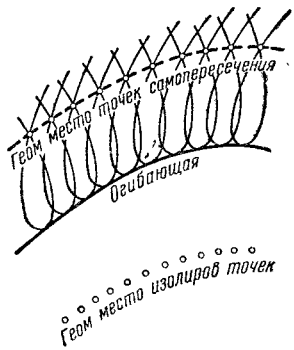

Рис. 56.

*) Существуют еще *кратные точки*, которые получаются, если «изолированная» точка попадает на гладкую дугу кривой.

Поэтому мы ограничимся нахождением лишь дискриминантной линии, так как в рассматриваемых случаях она будет совпадать с огибающей, т. е. ограничимся исключением параметров из уравнений (57) или (58).

6. Примеры нахождения огибающих

Пример 1. Рассмотрим опять семейство окружностей (35), т. е. положим

$$f(x, y, \alpha) = \alpha^2 - 2\alpha x + (x^2 + y^2 - R^2).$$

Производная этого многочлена равна

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = 2\alpha - 2x.$$

Таким образом, для определения огибающей мы должны исключить α из уравнений

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 - 2\alpha x + (x^2 + y^2 - R^2) = 0, \\ 2\alpha - 2x = 0. \end{aligned}\right\}$$

Эту же систему мы имели и раньше (см. (49)), и из нее получили $y^2 = R^2$ (см. (50)). Таким образом, огибающая состоит из двух параллельных прямых $y = R$ и $y = -R$ (см. рис. 51).

Пример 2. Рассмотрим теперь семейство окружностей (36), т. е. положим

$$f(x, y, \alpha) = \alpha^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right) - 2\alpha x + (x^2 + y^2 + h^2).$$

Производная этого многочлена равна

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = 2\alpha\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right) - 2x.$$

Таким образом, для определения огибающей мы должны исключить α из уравнений

$$\begin{aligned} \alpha^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right) - 2\alpha x + (x^2 + y^2 + h^2) = 0, \\ 2\alpha\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right) - 2x = 0. \end{aligned}$$

Умножая второе из этих уравнений на $-\frac{\alpha}{2} + \frac{x}{2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)}$ и прибавляя к первому, получим

$$x^2 + y^2 + h^2 - \frac{x^2}{1 - \frac{h^2}{c^2}} = 0,$$

откуда, разделив на h^2 и приводя подобные члены, находим уравнение искомой огибающей *) в наиболее простой форме (ср. (22))

$$\frac{x^2}{c^2-h^2}-\frac{y^2}{h^2}=1\ **).$$

Пример 3. Рассмотрим семейство траекторий (41), т. е. положим

$$f(x, y, \alpha, \beta)=gx^2-2\alpha\beta x+2\alpha^2 y,$$
$$g(\alpha, \beta)=\alpha^2+\beta^2-v_0^2.$$

Вычисляем производные:

$$f'_\alpha=4\alpha y-2\beta x,\quad f'_\beta=-2\alpha x,\quad g'_\alpha=2\alpha,\quad g'_\beta=2\beta.$$

---

*) Строго говоря, пока доказано только, что из двух первоначальных уравнений, содержащих параметр α, следует, что x и y удовлетворяют найденному уравнению гиперболы. Верно ли обратное, т. е. всякие ли x, y, удовлетворяющие уравнению гиперболы, будут удовлетворять первоначальным уравнениям при некотором α? В рассматриваемом случае в справедливости этого можно убедиться, проводя вычисления в обратной последовательности. Такую проверку эквивалентности полученного уравнения тем уравнениям с параметрами, которые имелись первоначально, следовало бы проводить и в каждом из последующих примеров. Мы этого делать не будем.

**) Во второй главе мы получили не всю эту гиперболу, а лишь правую ее ветвь (см. рис. 20), т. е. к уравнению этой гиперболы было добавлено неравенство $x>0$. Это происходило потому, что

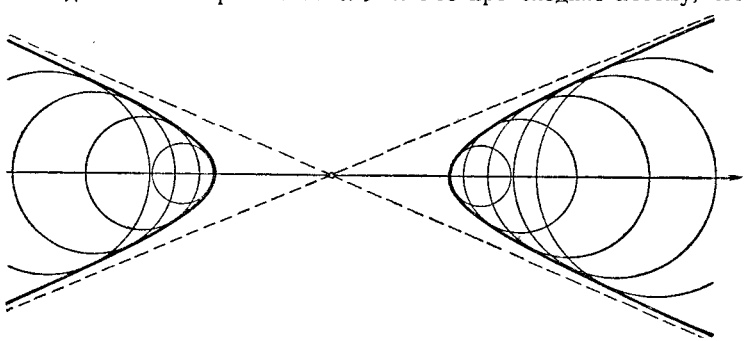

Рис. 57.

по смыслу задачи мы рассматривали лишь положительные α, т. е. не все линии семейства (36), а лишь линии, соответствующие положительным α. Если рассматривать все окружности семейства (36), то огибающей будет вся полученная гипербола (рис. 57).

Последнее из уравнений (58) принимает вид (после сокращения на 4)

$$2\alpha\beta y + (\alpha^2 - \beta^2)\, x = 0.$$

Таким образом, для нахождения уравнения огибающей мы должны исключить α и β из уравнений

$$\left.\begin{aligned} gx^2 - 2\alpha\beta x + 2\alpha^2 y &= 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 - v_0^2 &= 0, \\ 2\alpha\beta y + (\alpha^2 - \beta^2)\, x &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

Умножая первое из этих уравнений на β, а третье — на $-\alpha$ и складывая, получим после приведения подобных членов

$$g\beta x^2 - \alpha(\alpha^2 + \beta^2)\, x = 0,$$

или, учитывая второе из уравнений (63),

$$g\beta x^2 - \alpha v_0^2 x = 0.$$

Так как линия $x = 0$, т. е. ось ординат, очевидно, не является огибающей (это ясно геометрически — из рис. 10, а также и чисто алгебраически — линия $x = 0$ не является решением уравнений (63)), то можно последнее уравнение на x сократить

$$g\beta x - \alpha v_0^2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \alpha = \frac{g\beta}{v_0^2}\, x.$$

Подставляя это значение α в третье уравнение (63), мы получим (после сокращения на $\beta^2 x$)

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

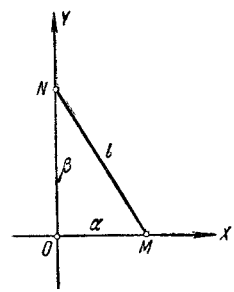

Рис. 58.

Это и есть уравнение искомой огибающей. Нетрудно видеть, что эта линия совпадает с найденной в главе I параболой безопасности. Например, исключив t из уравнений (12), (13) (и заменив h на y), мы и получим написанное выше соотношение.

Пример 4. Отрезок постоянной длины l скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым. Найдем огибающую этих отрезков (см. рис. 38); эта огибающая, как было сказано в главе III, называется *астроидой*).

Пусть MN — один из рассматриваемых отрезков (рис. 58). Две взаимно перпендикулярные прямые, по которым скользят

концы отрезка, мы примем за оси координат. Обозначим через α абсциссу точки M, а через β — ординату точки N. Тогда, учитывая, что длина отрезка MN равна l, мы получим из прямоугольного треугольника OMN:

$$\alpha^2+\beta^2=l^2. \tag{64}$$

Далее, угловой коэффициент прямой MN, т. е. тангенс угла XMN, равен $-\frac{\beta}{\alpha}$, так как $\operatorname{tg} \angle XMN=-\operatorname{tg} \angle OMN$, это же значение угловой коэффициент имеет и при любом другом положении отрезка MN, т. е. при положении этого отрезка во второй, третьей или четвертой четверти. Таким образом, уравнение прямой MN имеет вид

$$y=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)x+\beta,$$

или, после умножения на α,

$$\alpha y+\beta x-\alpha\beta=0. \tag{65}$$

Мы приходим к задаче нахождения огибающей семейства прямых линий, определяемого уравнениями (64), (65), или, что то же самое, уравнениями (42), (43), в которых

$$f(x, y, \alpha, \beta)=\alpha y+\beta x-\alpha\beta,$$
$$g(\alpha, \beta)=\alpha^2+\beta^2-l^2.$$

Вычисляем производные:

$$f'_\alpha=y-\beta, \quad f'_\beta=x-\alpha, \quad g'_\alpha=2\alpha, \quad g'_\beta=2\beta.$$

Последнее из уравнений (58) принимает вид (после сокращения на 2)

$$\beta y-\alpha x+\alpha^2-\beta^2=0. \tag{66}$$

Таким образом, для нахождения огибающей мы должны исключить α и β из уравнений (64), (65), (66). Умножая уравнения (65) на α, а (66) на β и складывая, получим

$$(\alpha^2+\beta^2)y=\beta^3,$$

откуда находим, учитывая соотношение (64),

$$\beta=[(\alpha^2+\beta^2)y]^{1/3}=(l^2y)^{1/3}.$$

Аналогично, умножая уравнение (65) на β, а (66) — на $-\alpha$ и складывая, получим

$$\alpha=(l^2x)^{1/3}.$$

Наконец, подставляя эти значения α и β в (64), находим

$$(l^2x)^{2/3}+(l^2y)^{2/3}=l^2,$$

или, после сокращения на $l^{4/3}$,

$$x^{2/3}+y^{2/3}=l^{2/3}. \tag{67}$$

Это и есть уравнение огибающей (т. е. астроиды).

Пример 5. На плоскости задан прямой угол. Проводятся всевозможные прямые, отсекающие от этого угла треугольники, имеющие площадь 2. Найдем огибающую всех этих прямых (рис. 59).

Примем стороны заданного угла за оси координат. Возьмем одну из прямых, отсекающих от этого угла треугольник площади 2, и пусть M, N — точки пересечения этой прямой с осями координат (рис. 60). Обозначим абсциссу точки M через α, а

Рис. 59.

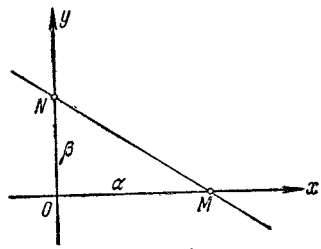

Рис. 60.

ординату точки N — через β. Тогда, как и выше (см. (65)), мы найдем, что прямая MN определяется уравнением

$$\alpha y+\beta x-\alpha\beta=0. \tag{68}$$

Однако числа α и β удовлетворяют уже не условию (64), которое означало, что длина отрезка MN равна l, а условию

$$\alpha\beta=4, \tag{69}$$

которое означает, что площадь треугольника OMN равна 2 $\left(\text{так как } OM=\alpha,\ ON=\beta, \text{ то } S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}\alpha\beta\right)$. Таким образом, мы приходим к задаче нахождения огибающей семейства

прямых, определяемого уравнениями (68), (69), или, что то же самое, уравнениями (42), (43), в которых

$$f(x, y, \alpha, \beta) = \alpha y + \beta x - \alpha\beta,$$
$$g(\alpha, \beta) = \alpha\beta - 4.$$

Вычисляем производные:

$$f'_\alpha = y - \beta, \quad f'_\beta = x - \alpha, \quad g'_\alpha = \beta, \quad g'_\beta = \alpha.$$

Последнее из уравнений (58) принимает вид

$$\alpha y - \beta x = 0. \tag{70}$$

Таким образом, для нахождения огибающей мы должны исключить α и β из уравнений (68), (69), (70). Из (68) и (70) получаем

$$\alpha y = \frac{1}{2}\alpha\beta, \quad \beta x = \frac{1}{2}\alpha\beta.$$

Сокращая первое из этих уравнений на α, а второе — на β (это возможно, так как в силу (69) α и β отличны от нуля), находим

$$\beta = 2y, \quad \alpha = 2x.$$

Наконец, подставляя найденные значения α и β в соотношение (69), получаем искомое уравнение огибающей

$$xy = 1. \tag{71}$$

Любая *касательная* к линии (71) является одной из прямых рассматриваемого семейства и потому отсекает от заданного прямого угла треугольник площади 2. Как мы видели в конце главы II, таким же свойством обладает гипербола, если ее асимптоты взаимно перпендикулярны; такая гипербола называется *равнобочной*. Из этого можно заключить, что *линия* (71) *также является гиперболой*. Различие в записи уравнений (71) и (22), каждое из которых определяет одну и ту же линию — гиперболу, объясняется тем, что гиперболы (71) и (22) по-разному расположены относительно осей координат.

Пример 6. Рассматривается окружность радиуса $2a$ с центром в точке F_1 и внутри этой окружности точка F_2, находящаяся от центра на расстоянии $2c$. Произвольная точка A окружности соединяется отрезком с точкой F_2 и через середину этого отрезка проводится к нему перпен-

дикуляр L (рис. 61). Найти огибающую семейства таких перпендикуляров (рис. 62).

Для решения этой задачи мы примем прямую F_1F_2 за ось абсцисс, а перпендикуляр к отрезку F_1F_2 в его середине — за ось ординат. Тогда абсциссы точек F_1 и F_2 будут равны c и $-c$. Пусть A — произвольная точка на рассматриваемой окруж-

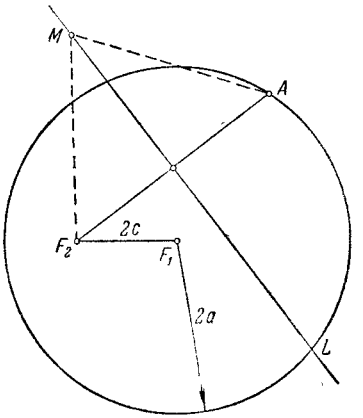

Рис. 61.

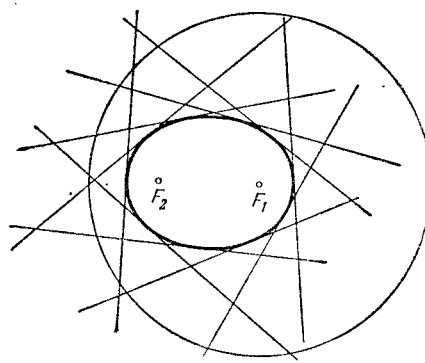

Рис. 62.

ности, а α и β — координаты этой точки. Для того чтобы точка M с координатами x, y лежала на перпендикуляре L, проведенном через середину отрезка AF_2, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство $MA = MF_2$, или, что равносильно, равенство

$$MA^2 = MF_2^2.$$

Но $MA^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$ (см. стр. 24) и, аналогично, $MF_2^2 = (x+c)^2 + y^2$. Таким образом, уравнение перпендикуляра L, проведенного через середину отрезка AF_2, записывается в виде

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (x+c)^2 + y^2,$$

или, после очевидных упрощений,

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2cx - c^2 = 0. \qquad (72)$$

Уравнение окружности радиуса $2a$ с центром в точке F_1, имеющей координаты $(c, 0)$, записывается в виде $(x-c)^2 + y^2 = (2a)^2$ (см. (18)). Так как точка A лежит на этой

окружности, то ее координаты α, β должны удовлетворять написанному уравнению, т. е.

$$(\alpha - c)^2 + \beta^2 = 4a^2,$$

или, после очевидных упрощений,

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha c + c^2 - 4a^2 = 0. \qquad (73)$$

Итак, поставленная задача сводится к нахождению огибающей семейства прямых, заданного уравнениями (72), (73). Обозначая, как обычно, левую часть уравнения (72) через $f(x, y, \alpha, \beta)$, а левую часть уравнения (73) через $g(\alpha, \beta)$, мы легко напишем последнее из уравнений (58):

$$(\alpha - x)\beta - (\beta - y)(\alpha - c) = 0. \qquad (74)$$

Из уравнений (72), (73), (74) и получается уравнение огибающей. Эта огибающая носит название *эллипса*; точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса. Уравнение эллипса можно получить, исключив параметры α и β из уравнений (72), (73) и (74). Однако мы не будем этого делать, а выведем из соотношения (74) несколько интересных геометрических свойств эллипса.

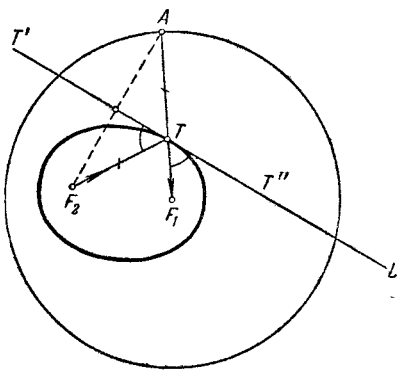

Рис. 63.

Вспомним прежде всего, что при выборе значений α и β, удовлетворяющих второму уравнению (58), т. е. при выборе некоторой линии L рассматриваемого семейства, неизвестные x, y, определяемые из системы (58), представляют собой *координаты той точки T, в которой линия L касается огибающей*. В рассматриваемом случае это означает, что если мы выберем значения α и β, удовлетворяющие уравнению (73), т. е. выберем точку A (рис. 63) на окружности, то *неизвестные x, y, определяемые из системы* (72), (74), *представляют собой координаты той точки T, в которой перпендикуляр, проведенный через середину отрезка AF_2, касается эллипса*. Итак, координаты точки касания T удовлетворяют уравнению (74). Это уравнение после

очевидных преобразований можно переписать в виде

$$y = \frac{\beta}{\alpha - c} x - \frac{\beta c}{\alpha - c},$$

откуда видно, что оно определяет некоторую *прямую*. Точка T лежит на этой прямой, так как ее координаты удовлетворяют этому уравнению. Далее, точка F_1 также лежит на этой прямой (так как ее координаты $x = c$, $y = 0$, очевидно, удовлетворяют этому уравнению); лежит на этой прямой и точка A (ее координаты, как легко видеть, также удовлетворяют написанному уравнению). Таким образом, *точки F_1, T и A лежат на одной прямой.*

Вспомним теперь, что перпендикуляр L, проходящий через середину отрезка AF_2, является *касательной* к эллипсу, проведенной через произвольную его точку T, так как эллипс является огибающей всех таких перпендикуляров. Далее, точки F_2 и A симметричны относительно прямой L. Наконец, точки F_1, T и A, как мы доказали, лежат на одной прямой, т. е. точка T лежит на радиусе F_1A. Итак, *если мы проведем произвольную касательную L к эллипсу, то точка A, симметричная фокусу F_2 относительно прямой L, будет лежать на окружности радиуса $2a$ с центром в фокусе F_1; точка T, в которой прямая L касается эллипса, совпадает с точкой пересечения прямой L и радиуса F_1A.*

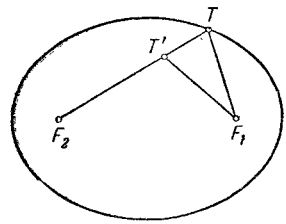

Рис. 64.

Так как точки F_2 и A симметричны относительно прямой L, то $TF_2 = TA$, и потому $TF_2 + TF_1 = TF_1 + TA = 2a$. Таким образом, *сумма расстояний от точки T, лежащей на эллипсе, до его фокусов равна $2a$*. Это верно для любой точки, лежащей на эллипсе, так как в каждой точке эллипса его касается одна из прямых L (ведь эллипс есть огибающая). Легко понять, что для точки T', лежащей *внутри* эллипса, сумма расстояний $T'F_1$ и $T'F_2$ меньше $2a$ (рис. 64), а для точки, лежащей *вне* эллипса, эта сумма больше $2a$. Итак, *эллипс есть геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний которых от двух заданных точек, называемых фокусами эллипса, равна заданному отрезку $2a$*. Это свойство эллипса обычно принимают за его определение.

Далее, так как точки F_2 и A симметричны относительно прямой L, а отрезки F_1T и TA составляют продолжение один другого, то

$$\angle F_2TT' = \angle ATT' = \angle F_1TT''.$$

Это означает, что луч света, вышедший из точки F_2 в направлении F_2T, отразившись от прямой L по закону «угол падения равен углу отражения», пойдет далее по отрезку TF_1. Но ведь прямая L касается эллипса в точке T, и потому отражение луча от прямой L в точке T равносильно отражению от самого эллипса в точке T. Итак, *если в одном фокусе эллипса поместить точечный источник света, то каждый луч, отразившись от эллипса, пойдет затем во второй фокус, т. е. все отраженные лучи соберутся* («сфокусируются» — отсюда и название «фокус») *во втором фокусе эллипса* (рис. 65). Это «оптическое» свойство эллипса напоминает установленное в главе I свойство параболы. Аналогичным свойством обладает и гипербола.

Рис. 65.

Заметим в заключение, что уравнение рассматриваемого эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Это уравнение можно получить из (72), (73), (74) исключением параметров α и β; такое исключение параметров требует не очень коротких алгебраическнх преобразований, и потому мы его здесь не приводим. Обычно положительную величину $a^2 - c^2$ обозначают через b^2, и уравнение эллипса записывается в виде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{75}$$

Замечание. Мы рассмотрели несколько примеров нахождения огибающих, ограничиваясь при этом лишь *алгебраическими линиями*. Сказанное выше можно применять и к неалгебраическим (трансцендентным) линиям. Простейшими примерами неалгебраических линий являются синусоида, графики показательной и логарифмической функций, циклоида. Однако при этом для нахождения огибающих надо уметь

дифференцировать не только многочлены, но также более сложные функции: показательные, тригонометрические и др. *). Кроме того, особые точки неалгебраических линий могут иметь весьма сложное строение и их может быть бесконечно много. Для того чтобы избежать всех этих усложнений, мы и ограничились рассмотрением лишь алгебраических линий и семейств.

7. Эволюты и эвольвенты

Напомним некоторые понятия, введенные в главе III (стр. 41). Рассмотрим некоторую кривую линию K. В произвольной точке A этой кривой проведем к ней касательную AD и перпендикуляр AN к этой касательной (рис. 40). Прямая AN называется *нормалью* к кривой K в точке A. Если мы рассмотрим нормали кривой K, проведенные во всех точках этой кривой, то получим семейство прямых — семейство нормалей кривой K. Огибающая E этого семейства прямых называется *эволютой* рассматриваемой линии K.

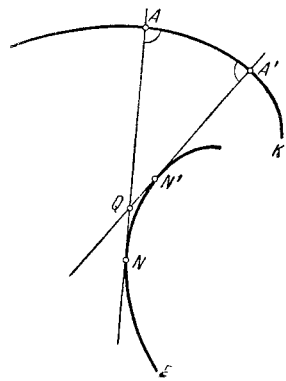

Рис. 66.

Проведем нормали в двух близких друг к другу точках A, A' кривой K. Пусть N, N' — те точки, в которых эти нормали касаются эволюты, а Q — точка пересечения нормалей AN и $A'N'$ (рис. 66). Тогда в «треугольнике» $AA'Q$, имеющем в качестве «основания» дугу AA' линии K, углы при основании равны (они прямые, так как AN и $A'N'$ — нормали). Если бы основание AA' было прямолинейным отрезком, то из равенства углов при этом основании вытекало бы, что боковые стороны AQ и $A'Q$ равны. Однако в действительности основание AA' немного искривлено, и потому боковые стороны AQ и $A'Q$ лишь примерно одинаковы

$$AQ \approx A'Q.$$

Далее, дуга $\smile NN'$ эволюты искривлена мало (нормали AN и $A'N'$ образуют между собой очень маленький угол!), и

*) См. книгу «Что такое дифференцирование?» того же автора (популярные лекции по математике, вып. 17) или статью «Интеграл и производная» в третьем томе «Детской энциклопедии».

потому длина этой дуги очень мало отличается от длины ломаной NQN':

$$\smile NN' \approx NQ + QN'.$$

Таким образом,

$$\smile NN' \approx NQ + QN' = (AN - AQ) + (A'Q - A'N') =$$
$$= (AN - A'N') + (A'Q - AQ) \approx AN - A'N'.$$

Замечательно, что полученное приближенное равенство $\smile NN' \approx AN - A'N'$ в действительности является точным

$$\smile NN' = AN - A'N'. \qquad (76)$$

Это доказывается на основании указанного выше приближенного равенства при помощи *интегрирования* — операции, обратной к дифференцированию и изучаемой в высшей математике. При этом равенство (76) справедливо без предположения, что дуга AA' является «маленькой».

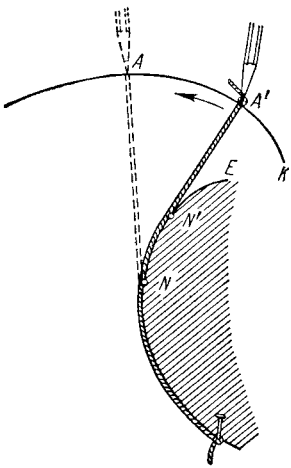

Рис. 67.

Равенство (76) допускает очень простое и наглядное истолкование. Представим себе, что изготовлена пластина в форме эволюты, и на эту пластину навернута идеально тонкая, гибкая и нерастяжимая нить. Допустим, что эта нить натянута таким образом, что она идет по эволюте до точки N', а далее идет по отрезку $N'A'$ касательной к эволюте, и в этой точке A' к нити прикреплен карандаш (рис. 67). Так как, в силу (76), $AN = \smile NN' + N'A'$, то карандаш можно переместить в точку A, причем нить останется натянутой. Так как это верно для любой точки A на линии K, то, *двигая карандаш таким образом, чтобы нить сматывалась с эволюты, оставаясь натянутой, мы опишем карандашом линию* K. На основании этого линию K называют *эвольвентой* (разверткой) линии E.

Итак, если E — эволюта линии K, то K есть эвольвента линии E. Если мы поместим карандаш в другой точке

навернутой на линию E нити, то при раскручивании нити он опишет другую эвольвенту линии E. Таким образом, линии E соответствует бесконечно много эвольвент; для каждой из этих эвольвент линия E является эволютой. Так как каждая касательная к эволюте E является нормалью ее эвольвенты K (ведь эволюта и определяется как огибающая семейства нормалей кривой K!), то любые две эвольвенты линии E имеют общие нормали, т. е. нормаль к одной эвольвенте является нормалью и ко второй (рис. 68). При этом длина отрезка общей нормали, заключенного между двумя

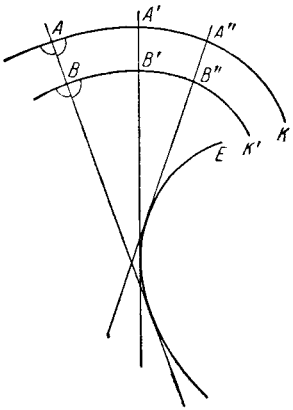

Рис. 68.

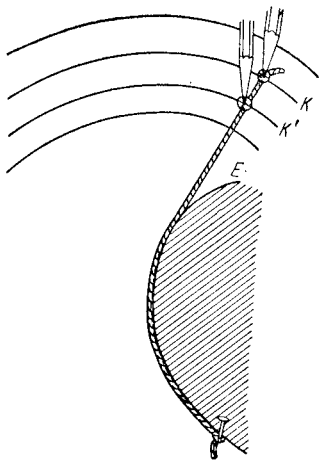

Рис. 69.

эвольвентами, постоянна, т. е. $AB = A'B' = A''B'' = \ldots$ Действительно, если укрепить на нити, сматывающейся с эволюты E, два карандаша (рис. 69), то эти карандаши опишут две эвольвенты линии E, и длина отрезка общей нормали, заключенного между этими эвольвентами, будет все время оставаться равной длине отрезка нити между карандашами.

Если нить, сматывающуюся с эволюты, закрепить в некоторой точке N линии E, то при дальнейшем движении карандаш опишет дугу окружности, касающуюся линии K в точке A (рис. 70). Радиус этой окружности равен длине отрезка нормали от точки A до точки N, в которой нормаль касается эволюты; центр окружности находится в точке N (рис. 71). Построенная окружность называется *соприкасающейся окружностью* линии K в точке A. Эта окружность наиболее близко подходит к кривой K около точки A по

сравнению со всеми другими окружностями. Можно сказать, что маленькая дуга линии K около точки A ведет себя так же, как и дуга соприкасающейся окружности; в частности, искривление (кривизна) линии K вблизи точки A, т. е. скорость поворота касательной при перемещении точки касания по линии K, совпадает с искривлением соприкасающейся окружности. В связи с этим центр N соприкасающейся окружности называют *центром кривизны* линии K

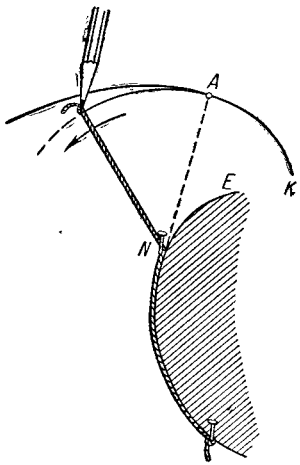

Рис. 70.

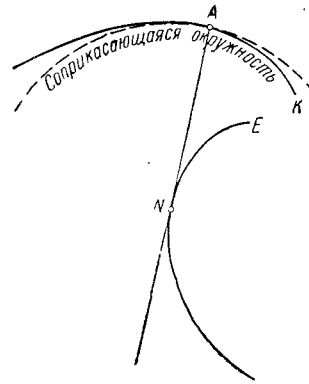

Рис. 71.

в точке A, а ее радиус AN называют *радиусом кривизны* линии K в точке A. Итак, радиус кривизны кривой K в точке A (его обозначают через ρ_A) равен длине отрезка нормали от точки A до точки N, в которой нормаль касается эволюты, а центр кривизны (точка N) лежит на эволюте. Иначе говоря, *эволюта E кривой K является геометрическим местом центров кривизны этой кривой*. Заметим еще, что равенство (76) выражает следующую геометрическую теорему: *длина дуги эволюты равна разности радиусов кривизны, соответствующих концам этой дуги* (т. е. $\smile NN' = \rho_A - \rho_{A'}$).

Таким образом, эволюта очень тесно связана по своим геометрическим свойствам с исходной кривой K. Укажем без доказательства, каким образом, зная уравнение линии K, можно найти уравнение ее эволюты. Пусть линия K задается уравнением

$$f(x, y) = 0.$$

Возьмем на кривой K произвольную точку A; обозначим ее коор-

динаты через α и β. Так как точка A лежит на линии K, то координаты α, β этой точки удовлетворяют уравнению линии K, т. е.

$$f(\alpha, \beta) = 0. \tag{77}$$

В высшей математике доказывается, что нормаль к линии K, проведенная в точке A, имеет уравнение

$$(y - \beta) f'_\alpha(\alpha, \beta) - (x - \alpha) f'_\beta(\alpha, \beta) = 0. \tag{78}$$

Таким образом, семейство нормалей кривой K определяется уравнением (78), содержащим параметры α, β, которые связаны соотношением (77). Для нахождения огибающей этого семейства, т. е. для нахождения эволюты, нужно теперь применить теорему 2.

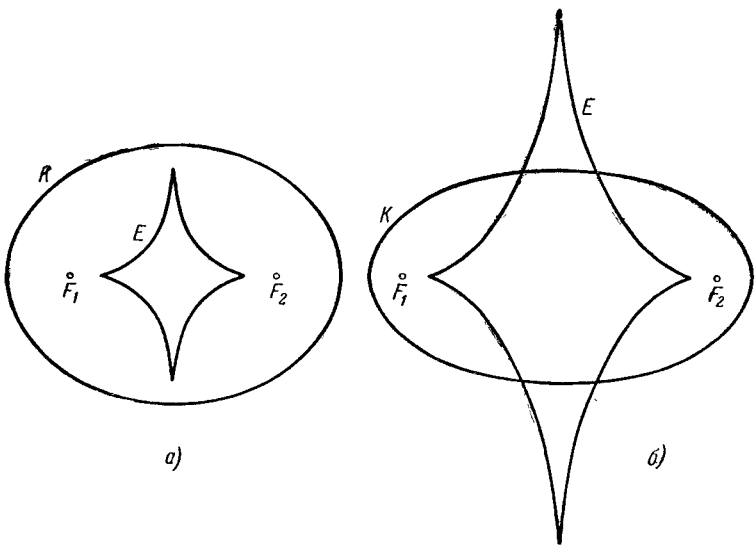

Рис. 72.

Мы ограничимся указанием без проведения вычислений трех примеров.

Эволютой эллипса (75) является кривая

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

(рис. 72, *а* и *б*); эта кривая получается из астроиды «растяжением» ее в направлении оси ординат. Далее, эволютой астроиды

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$$

(см. стр. 65) служит новая астроида, получающаяся из

первой подобным увеличением в два раза и поворотом на угол 45° (рис. 73). Наконец, отметим еще, что, как мы видели в главе III, эволютой верхней циклоиды, изображенной на рис. 43, является нижняя. Следовательно, верхняя

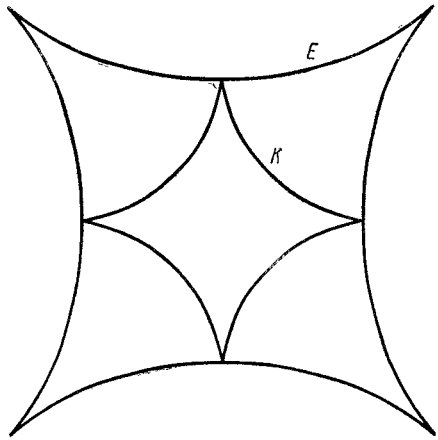

Рис. 73.

циклоида является эвольвентой нижней циклоиды. На этом основано устройство *циклоидального маятника* (рис. 74).

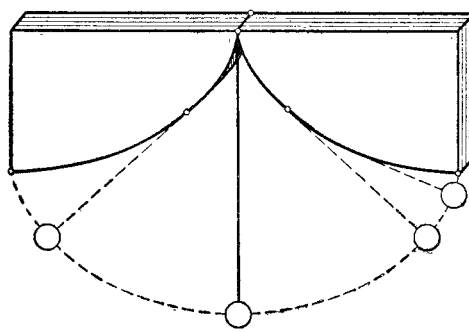

Рис. 74.

За подробностями мы отсылаем читателя к книге Г. Н. Бермана «Циклоида», которая содержит много интересных фактов из геометрии и механики, связанных с циклоидой, астроидой и другими кривыми, получающимися при качении круга.